الجمهورية العراقية وزارة التعليم العالي والبحث ألعلمي

المريد الموتى والمراز المان الما فالمراب (العراف) في

ويوني الموني

المراوري الموتني

ا لأشاذ المسُاعدفياض عبراللطيف الأستأذ المشارك الدكتورعبرالحميعلى المعانور والموتني

متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة مكتبتي الخاصة على موقع ارشيف الانترنت الرابط https://archive.org/details/@hassan\_ibrahem

مريونت ولايشي دعياد 22 . ١١. 1989

## وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

# النظرية الحركية للغازات والميكانيك الاحصائي

#### تأليف

الاستاذ المشارك د . عبد الحميد على العبد كلية التربية/ الموصل الاستاذ المساعد فياض عبد اللطيف النجم كلية التربية/ بغداد

الطبعة الأو لى

# المسارور من الموبئي

# بسم الله الرحمن الرحيم مقدمة الكتاب

لقد وضعنا هذا الكتاب ، استجابة لعملية التعريب النشطة التي تتولاها وزارة التعليم العالي والبحث العلمي الموقرة ، تكريماً للغتنا العربية الجميلة ولجعل التعليم في متناول الجميع .

ولقد كتبنا فصول الكتاب طبقاً للمنهج المقرر ، ولفصل دراسي واحد ، مع مراعاة التسلسل التأريخي لموضوعاته ، واكثرنا من الأمثلة التطبيقية والمسائل المحلولة والتارين مع نواتجها ، لكي يستوعب الطالب مفاهيمه وتتوضح مجالات استعالات الواسعة ولا سيا في الثرموداينمكس والفلك وفيزياء الحالة الصلبة والفيزياء الذرية .

وهو يعتبر جزءاً متماً لدراسة الثرموداينمكس ، لأنه يحاول ايجاد التفسير النظري لبعض خواص المادة ، والتي يعجز علم الثرموداينمكس على تفسيرها ، بسبب طبيعة الأخير التجريبية وعدم اعتاده على دراسة الخواص التفصيلية لجسيات النظام ، وهذا ما يتناوله علم النظرية لحركية للغازات والميكانيك الأحصائي ، فهو يتطرق الى المزيد من الفرضيات والتحويرات لوصف تصرف الجسيات مما يزيد التعقيدات الرياضية له ، بسبب التفاعل المعقد بين جسيات النظام وابتعاد خواصها عن الميكانيك التقليدي (ميكانيك نيوتين). ولقد استخدمنا مفاهيم الاحصاء والتكميم بِحُرِّية ، اختصاراً للجهد وزيادة في الدقة .

نأمل ان نكون قد اعطينا للموضوع بعض حقه ولو بصورة اولية مع المحافظة على الدقة العلمية مراعين بذلك ظروف وحاجات طلبة كليات التربية . والله من وراء القصد .

المؤلفان

متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة مكتبتي الخاصة على موقع ارشيف الانترنت الرابط

https://archive.org/details/@hassan\_ibrahem

المساور والموسئي

## الفصل الأول

#### النظرية الحركية للغازات

#### (1-1) مقدم**ة**:

لقد لاحظ الطالب في دراسة الثرموداينمكس ، بانه يعالج الكميات المنظورة (System) والتي لها علاقة بالحالة الداخلية للنظام (Macrscopic Properties) فلقد لاحظنا ، بانه عِلْم تجريبي يعتمد على عدد قليل من الاحداثيات ، مثل درجة الحرارة (T) والضغط (P) والحجم (V) والسعة الحرارية (C) وهذه كميات محسوسة وقابلة للقياس ، وهي لا تتطلب وضع فرضيات تفصيلية عن التركيب الداخلي للهادة ، ويمكن استخدام هذه الكميات المقاسة لتعيين قيم بعض الكميات الغير قابلة للقياس مباشرة ، مثل الانتروبي (S) والطاقة الداخلية (U) والانضغاطية (K) وغيرها .

ولكن الثرموداينمكس يعجز عن اعطاء فكرة عميقة لهذه المفاهيم ، وتغيرها بتغير الظروف الفيزيائية ، فهو عاجز ، مثلاً عن تفسير تغير الحرارة النوعية او اللزوجة او الضغط، مع درجة الحرارة ، وهو لا يفسر معنى الانتروبي او يعطي وسيلة لقياس قيمته المطلقة . ولهذه الاعتبارات لجأ العلماء الى دراسة الخواص المجهرية (Microscopic Properties) للمادة لغرض تفسير تصرف خواصها المنظورة . ان ذلك يتطلب وضع الكثير من الفرضيات لخواص اغلبها الغير قابلة للقياس ، لكونها غير منظورة او محسوسة ، مشل افتراض تواجد الجزيئات بمواصفات خاصة من حيث الشكل والحركة والحجم والطاقة والقوى بينها ، وهذا ما سوف نعالجه في كتابنا هذا .

ولعل أقدم هذه الفرضيات بهذا الشأن هي كون المادة غير متصلة التركيب بل تتكون من جزيئات ، وان الحرارة مظهر (Manifestation) للحركة الجزيئية .

وهناك ادلة كثيرة على هذه الحركة ، لعل اوضحها هي الحركة البراونية والانتشار . ولعل اقدم المفاهيم التي وضعت عن النظرية الحركية للهادة قد وضعها الفلاسفة الاغريق مثيل (لوكريشوس) ، (وديمقريطس) ، و (ابيقوروس) ، وبقيت هذه المفاهيم على حالها حتى بعث فيها الحياة العالم الايطالي (غاسيندي) في منتصف القرن السابع عشر فاستخدمها لتفسير حالات المادة وتحولاتها . ولقد توصل الى نفس النتيجة الانكليزي (هوك) بعد عشرين سنة من عمل غاسيندي . ولقد اشار الى هذه المحاولات (دانيال برنولي) في كتابه (هايدر وداينميكا عام(1738) وهو الذي قام باشتقاق قانون بويل . ثم ركد هذا العلم بعد برنولي لقرابة قرن من الزمن ، ثم طوره بسرعة عدد من المشاهير مثل جول (1848) وكلاوزيوس (1857) ، فلقد اشتق الأخير العلاقة بين (T.V.P) وحسب قيمة (CV.Cp) للغاز المثالي . وتلاه العديد من العلماء الافذاذ مثل (بولتزمان) و(كيرشوف) و (فان ديرفال) و (تيت) و (اللورد رايلي) و (كلارك ماكسويل (1859) . ومن الطريف ان ماكسويل اضطر لدراسة الغازات عندما كان يجري دراسة على حلقات الكوكب زحل ، فوضع قانون توزيع السرع للجزيئات .

ولقد تطورت النظرية الحركية للهادة بسرعة بعد وضع نظرية التكميم (1901) فأصبحت اهم واشمل نظرية في تفسير العديد من ظواهر المادة . كما سنرى في الفصول القادمة .

#### (١ - ٢) - النظرية الحركية للغاز المثالي :

تعتبر هذه النظرية من أبسط النظريات لدراسة الخواص المجهرية للمادة ، نظراً لكونها تدرس خواص جزيئة واحدة باستخدام قوانين الميكانيك التقليدي . وهي تنحصر في دراسة الغازات لكونها ابسط حالات المادة ، بسبب صغر التأثيرات الجزيئية على بضعها البعض مقارنة بالحالة السائلة والصلبة .

وسوف نشتق بعض الخواص الثرموداينميكية للغاز المثالي بالاعتاد على الفرضيات التالية : \_

١ \_ ان أي حجم محسوس من الغاز يحتوي على أعداد هائلة من

الجزيئات ، وهذا الفرض تؤيده الحقيقة ، فان المول الغرامي من المادة يحتوي على ٣٠٠ × ٢٠١٠ جزيئة (عدد افوكادور ونرمز له ١٥٥) وان السنتيمتر المكعب من الغاز في الظروف القياسية يحتوي زهاء ٢٠٩ × ١١٠ جزيئة (عدد لوشميت).

المسافة بين الجزيئات كبيرة مقارنة بقطر الجزيئي (٢ ـ ٣ انكستروم)
 فهي تزيد على ذلك في الظروف القياسية بعشرة أضعاف ، فمثلاً يمكن البرهنة
 بسهولة ان جزيئات الماء في الحالة البخارية بدرجة ١٠٠ س° تتباعد ١٢ ضعفاً عن حالة السيولة .

٣ ـ القوى الجزيئية صغيرة ، إلا عندما تتصادم مع بعضها او مع الجدار،
 وهي تسير بحركة عشوائية وبخطوط مستقيمة عند انعدام القوى الخارجية (مشل الجاذبية والمجلات الكهر ومغناطيسية) .

إلى الجزيئات كتل نقطية (Point Masses) مرنة وملساء عند تصادمها مع بعضها او مع الجدار بحيث لا تتغير المركبة الماسة للسرعة بعد التصادم . وان زمن التصادم صغير مقارنة مع زمن اصطدامين متتاليين .

تتوزع الجزيئات بصورة عشوائية من حيث الحركة والاتجاه ولا توجد أفضلية لأي اتجاه ، وان خواص الغاز في اية نقطة في النظام (System) متجانسة (مثل الكثافة والضغط ودرجة الحرارة) . على أن لا يكون عنصر الحجم Δ ¬ مغيراً جداً ، وتنعدم القوى الخارجية .

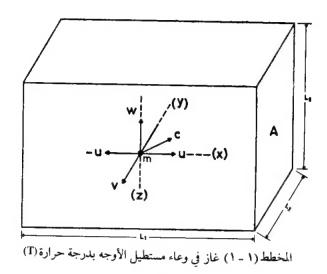
7 - تتغير سرعة الجزيئات باستمرار بسبب التصادم ولكن عددها لأي مدى من السرعة يبقى ثابتاً . ويتراوح انطلاقها (C(speed) من صفر الى قرابة انطلاق الضوء Co(ولأغراض التكامل سنفترض الانطلاق (c) تتراوح من صفر الى ما لا نهاية) .

ان الفرضيات اعلاه تنطبق تقريباً على الغازات البسيطة ( الأحادية الـذرة) عندما تكون درجة الحرارة عالية (بعيدة عن حالة السيولة) والضغط واطبىء (الجزيئات متباعدة). ولا يمكن اعتبار الجزيئات المتعددة الذرات كرات نقطية .

ولاشتقاق بعض الخواص البسيطة لهذا الغاز (وللغاز الحقيقي تقريباً). نفرض وعاءاً مستطيل الأوجه ابعاده ١٠٤١، الايحتوي على N جزيئة غاز درجة حرارته

$$C^2 = u^2 + v^2 + w^2$$

فان تغير الزخم السيني عند اصطدامها بالوجه (A) يساوي  $^{-2$  وهو رد فعل السطح ، لأننا افترضنا  $^{-2}$  موجبة نحو اليمين وسالبة نحو اليسار .



لذلك فانها تعود مرة اخرى بعد  $\frac{2l_1}{u}$  على فرض انها لا تتصادم مع الجزيئات الأخرى في طرينها) ، لذلك فان تغير الزخم في الثانية الواحدة على الوجه الجزيئة واحدة يساوي  $\frac{2mu}{\Delta t}$  وهذا يساوي  $\frac{mu^2}{l_1}$  وهذا يساوي تولدها الجزيئة على السطح (A) ، فاذا جمعنا القوى العمودية التي تولدها جزيئات الغاز على السطح (A) فان القوة الكلية (Fx) تساوي :

$$F_{X} = \frac{1}{l_{1}} \sum_{i=1}^{i=N} mU_{i}^{2}$$

$$F_{X}=rac{m}{l_{1}}\sum_{i=1}^{i=N} rac{\sum_{i}U_{i}^{2}}{i=1}$$
 : ناف الغاز متماثل الجزيئات فان

و بما ان  $\mathbf{w} = \mathbf{v} = \mathbf{u}$  بسبب عشوائیة الحرکة ، لذلك فان :

$$u^2 = \frac{C^2}{3}$$

$$..F_{x} = \frac{m}{3l_{i}} \sum_{i=1}^{i=N} C_{i}^{2}$$

ولكن بالتعريف (لدالة متقطعة) :

$$C^{2}_{RMS} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} C_{i}^{2}$$
 (1 - 1)

حيث CRMS تسمى جذر معدل مربع الانطلاق (CRMS تسمى جذر معدل مربع

ويرمز لها اختصاراً (RMS) ، لذلك فان :

$$F_X = \frac{mN}{31}, \quad C^2_{RMS}$$

$$P = \frac{F_x}{l_1 l_2}$$
: Logical content of the property of the

.. 
$$P = \frac{mN C^2_{RMS}}{31.1.1.1}$$

ولكن حجم الغاز ٧ = الغاز ال

$$...P V = \frac{1}{3} mN C^{2}RMS \qquad .... (Y-1)$$

$$E = \frac{1}{2} \text{ m } C^{2}_{RMS}$$
 :  $E = \frac{1}{2} \text{ m } C^{2}_{RMS}$  :  $E = \frac{1}{2} \text{$ 

$$..P.V = \frac{2}{3} NE$$

ويطلق على الكمية N.E بالطاقة الداخلية (U) للغاز

$$\therefore P = \frac{2}{3} \frac{U}{V} = \frac{2}{3} u \qquad \cdots \qquad (V - 1)$$

أي ان الضغط يتناسب مع كثافة الطاقة الداخلية للغاز . على هذا التعريف للضغط اكثر شمولية وعمقاً من كونه قوة عمودية على وحدة مساحة على سطح الجدار ، لأن للغاز ضغط في جميع اجزاءه سواء لامس الجدار ام لم يلامسه مشل الشمس والنجوم . فاذا قسم الغاز الى فئات عدد كل فئة (i) تشترك في نفس الانطلاق C فان :

$$C^{2}_{RMS} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i} NiCi^{2}$$

أما لو كان عدد الجزيئات التي يتراوح انطلاقها بين C + dC,C هو (C) فان:

$$C^{2}_{RMS} = \frac{1}{N_{0}} \int_{0}^{\infty} C^{2} dN (C) \qquad (\xi - 1)$$

على فرض ان توزيع السرع هو دالة متصلة . كذلك يعرف متوسط الانطلاق العلاقة :  $\infty$ 

$$CAV = \frac{1}{N} \circ \int_{-\infty}^{\infty} C dN(C) \qquad \qquad \cdots \qquad (e-1)$$

وعليه فان معادلة الغاز المثالي تصبح :

$$PV = nRT = \frac{NRT}{No} = NkT \qquad \cdots \qquad (7 - 1)$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \text{ m C}^2 \text{RMS} = \text{KT}$$

أو :

أي ان درجة الحرارة للغاز المثالي ، هي مقياس لمعدل طاقته الحركية الانتقالية . كذلك فان جميع جزيئات الغاز بنفس الدرجة الحرارية لها نفس الطاقة الحركية ، أي ان :

$$\frac{1}{2} m_{_{1}} C^{2}_{RMS_{_{1}}} = \frac{1}{2} m_{_{2}} C^{2}_{RMS_{_{2}}}$$

$$\frac{C_{RMS_{_{1}}}}{C_{RMS_{_{2}}}} = \sqrt{\frac{m_{_{2}}}{m_{_{1}}}} = \sqrt{\frac{M_{_{2}}}{M_{_{1}}}} \qquad (A - 1)$$

والمعادلة ( 1 \_ 1) تسمى معادلة كراهام في الانتشار (M هو الوزن الجزيئي mNo = في الذلك الغاز)، وهي تستخدم لفصل خليط غازين مختلفين في الكتلة عن بعضها البعض ؛ بامرار الخليط خلال انبوب مسامي . ويمكن استخدام (١ \_ ٧) لحساب سرعة الجزيئي (الجدول ١ \_ ١).

Gas	Не	Ne	A	H <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	Ο,	Co <sub>2</sub>	NH,	Air
CRMS (m / sec)	1310	581	413	1840	493	461	392	632	484
M (Kg / Kmole)	4	20.2	40	2	28	32	44	17	29

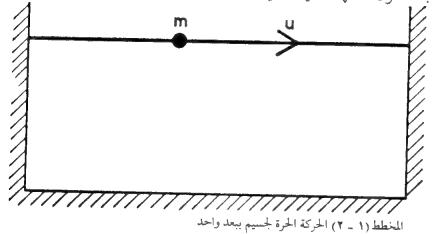
(الجدول ١ ـ ١) سرعة جزيئة عدد من الغازات بدرجة الصفر السلسيوسي .

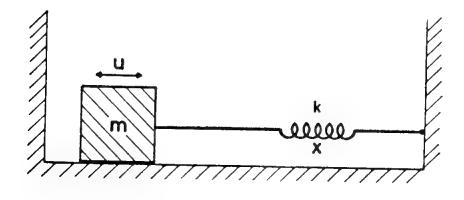
### (١ - ٣) مبدأ تساوي أقسام الطاقة:

(Principle of Equipartion of Energy)

هناك عدد من الأمثلة من الواقع المحسوس تساعدنا على توضيح فكرة

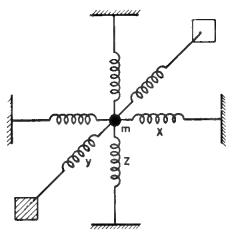
الدرجة الحرة (Degree of Freedom) فالمخطط (1-Y) مثلاً عمثل كتلة نقطية على هيئة خرزة (Beed) تنزلق على سلك ، تتحرك ببعد واحد ، طاقتها الكلية هي طاقة حركية ( $\frac{1}{2}$  m u²) أي ان الطاقة الحركية تعتمد على مربع السرعة . اما المخطط (1-Y) فيمثل جسيم كتلته (m) مربوط بنابض ثابتة (k) ، ويتحرك النظام حركة توافقية بسيطة ، طاقته الكلية حركية في الجسيم 1/Z mu² وطاقة المرونة الكامنة في النابض (1/Z k x²) ، حيث (x) هي الازاحة من وضع الاتزان . فنقول بان النظام عتملك درجتين للحركة الحرة (احداهم انتقالية والأخرى اهتزازية) تعتمدان على المتغيرين المحركة الحرة (احداهم نقو عتلك ستة درجات حرة للحركة اثنتان لكل التغيرين المحركة اثنتان لكل عيث :





المخطط (١ - ٣) نظام بمتلك درجتين للحركة الحرة

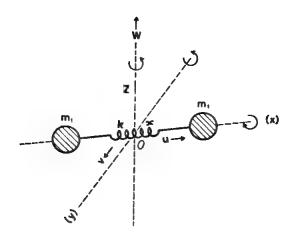
 $E = \frac{1}{2} \text{ m u}^2 + \frac{1}{2} \text{ m V}^2 + \frac{1}{2} \text{ m W}^2 + \frac{1}{2} \text{ k x}^2 + \frac{1}{2} \text{ ky}^2 + \frac{1}{2} \text{ k z}^2$   $e^{ak\cdot s} = \frac{1}{2} \text{ m u}^2 + \frac{1}{2} \text{ m W}^2 + \frac{1}{2} \text{ k x}^2 + \frac{1}{2} \text{ ky}^2 + \frac{1}{2} \text{ k z}^2$   $e^{ak\cdot s} = \frac{1}{2} \text{ m u}^2 + \frac{1}{2} \text{ m V}^2 + \frac{1}{2} \text{ m V}^2 + \frac{1}{2} \text{ k x}^2 + \frac{1}{2} \text{ k z}^2$   $e^{ak\cdot s} = \frac{1}{2} \text{ m u}^2 + \frac{1}{2} \text{ m V}^2 + \frac{1}{2} \text{ m V}^2 + \frac{1}{2} \text{ m V}^2 + \frac{1}{2} \text{ k z}^2$   $e^{ak\cdot s} = \frac{1}{2} \text{ m u}^2 + \frac{1}{2} \text{ m V}^2 + \frac{1}{2} \text{ m V}^2 + \frac{1}{2} \text{ k z}^2$   $e^{ak\cdot s} = \frac{1}{2} \text{ m u}^2 + \frac{1}{2} \text{ m V}^2 + \frac{1}{2} \text{ m V}^2 + \frac{1}{2} \text{ k z}^2$   $e^{ak\cdot s} = \frac{1}{2} \text{ m u}^2 + \frac{1}{2} \text{ m V}^2 + \frac{1}{2} \text{ m V}^2 + \frac{1}{2} \text{ m V}^2 + \frac{1}{2} \text{ k z}^2$   $e^{ak\cdot s} = \frac{1}{2} \text{ m u}^2 + \frac{1}{2} \text{ m V}^2 + \frac{1}{2} \text{ m V}^2$ 



المخطط (١ - ٤) نظام بستة درجات للحركة الحرة ( ذرة في بلورة )

أما الجسيم الحر الغير مقيد بقوى خارجية فان حركت انتقالية (Translational) بحتة ، لذلك فهو يمتلك ثلاثة درجات للحركة الحرة (f=3) وهذا يفسر الرقم (f=3) في المعادلة (f=3) حيث تكون الطاقة لكل درجة حركة حرة تساوي (f=3) في المعادلة (f=3) ما لو قذف هذا الجسيم شاقوليا الى الأعلى تحت تأثير الجاذبية الأرضية ؛ فانه يكتسب طاقة تشاقلية قدرها (f=3) وتسكون طاقت السكلية الأرضية ؛ فانه يكتسب طاقة تشاقلية قدرها (f=3) وتسكون طاقت السكلية مربع المناف فان مبدأ تساوي اقتسام الطاقة يقتصر على الحدود التي تحتوي على مربع المتغيرات المستقلة ، وهذه الحقيقة تعجز النظرية الحركية الأنفة الذكر في تفسيرها . ولقد برهن ذلك بولتزمان كها سنرى .

ومن الأمثلة المفيدة في الحركة الجزيئية ، هي خواص الجزيئة الثنائية الذرة (Diatomic molecule) كما في المخطط (1 ـ ٥) :



المخطط (١ \_ ٥) جزيئة ثنائية الذرة

فلو فرضنا ان الذرتين نقطتان وان f = 7 لأنها تمتلكان ٣ درجات حرة انتقالية

واثنتان دورانية واثنتان اهتزازية ، فان طاقتهم الكلية : E:

$$E = \frac{1}{2} mu^{2} + \frac{1}{2} mV^{2} + \frac{1}{2} mW^{2} + \frac{1}{2} ly \Omega^{2} + \frac{1}{2} lz \Omega^{2} + \frac{1}{2} k \xi^{2} + \frac{1}{2} my^{2} \xi$$

حيث I هو عزم القصور الذاتي حول ذلك المحور ، m كتلة الجزيئة  $u_{\xi,(2m_1)}$  السرعة بالنسبة لمركز الكتلة ؛ ،  $\frac{3}{2}$  الازاحة عن وضع الاتزان  $\Omega$  السرعة الزاوية ، حيث ان الطاقة الدورانية حول الاحدائي السيني صفر لأن  $m_{\xi,(2m_1)}$ 

ولقد اثبتت المعلومات الطيفية للجزيئات بانها تدور وتهتز اضافة الى حركتها الانتقالية ، ويقع طيفها في منطقة دون الحمراء (Infra red) وتكون طاقة الأهتزاز أكبر عادة من طاقة الدوران .

# (١ - ٤) - الطاقة الداخلية للغاز والسعة الحرارية النوعية التقليدية :

يمكن اعتبار الطاقة الداخلية للنظام (الغاز) بانها مجموعة طاقة الجسيات من ذرات وجزيئات تكون الغاز ، وهناك مصدران آخران للطاقة الداخلية للغاز الحقيقي .

أ \_ طاقة انتقالية والاخرى دورانية واهتزازية .

ب ـ طاقة التجاذب المتبادل بين الجسيات تسمى طاقة التأثير المسيات تسمى طاقة التأثير (Interaction energy) بسبب التأثيرات الكهربائية بين سحب الشحنات لذراتها ، وهي تتضاءل عندما تتباعد الجزيئات (يتخلخل الغاز) ولكنها تظهر عندما تتصادم الجزيئات مع بعضها .

لذلك فللغاز المثالي وللغاز المخلخل الضغط (تقريباً) تكون الطاقـة الداخلية .

$$u = Nof \frac{KT}{2} = f \frac{RT}{2} = PV \frac{f}{2} \cdots (9-1)$$

$$..P = \frac{2}{f}$$
 u  $u = \frac{U}{V}$  (كثافة الطاقة الداخلية)

أي ان الضغط يتناسب مع كثافة الطاقة الداخلية (u) .

$$Cv = (\frac{\partial u}{\partial T})v = \frac{fR}{2}$$

$$Cp = Cv + R = (\frac{f+2}{2})$$

$$\gamma = \frac{Cp}{Cv} = \frac{f+2}{f}$$
....(۱°-۱)

فالمعادلة (١ - ٩) تبين ان الطاقة الداخلية دالة لدرجة الحرارة فقط.

والمعادلة (١ - ١٠) تبينَ ان ٢٥٠٬٠٠٣ لا تعتمد على درجة الحرارة . وهـذه النتائج تصح للجزيئات الأحادية الذرة (لأنها أقرب للغاز المثالي) وتفشل للغازات المعقدة الجزيئات (الجدول ١ - ٢).

	بخار الماء	A	Не	Ne	H,	N <sub>2</sub>	O <sub>2</sub>	CI,	Hcl	CO <sub>2</sub>	NH,
Ср	8	5	5	_	6.87	6.94	7.03	8.15	7.07	8.94	8.82
Cal / mo	ole										
γ	1.304	1.67	1.66	1.64	1.41	1.4	1.4	1.36	1.4	1.29	1.33

الجدول (١ - ٢) ﴿ تَشَدُّ الْغَارَاتِ الْمُعَدَّدَةُ عَنِ الْغَارَ الْمُثَالِي ۗ

أما للجوامد فان f=6 فتكون Cv=6Cal/mole أما للجوامد فان f=6 فتكون وبتيت ويصح لعدد من الجوامد .

ما ذكر يتبين ان النظرية الحركية للغاز المثالي بالرغم من بساطتها ، فهي نجحت في تفسير الكثير من الظواهر المألوفة . ولكنها فشلت في تفسير اعتاده (Cv,Cp) مع درجة الحرارة (T) ، وعدم اجابتها عن سبب انقسام الطاقة بين الحدود التي تعتمد على مربع الاحداثي وعدم شمولها للحدود التي لا تحتوي على مربع المتغير (مثل الطاقة الكهربائية والمغناطيسية والتثاقلية) كذلك فان تعريفها لدرجة الحرارة كمقياس لمعدل الطاقة الحركية (العشوائية والانتقالية) للجزيئي بالنسبة للوعاء غير عملية التطبيق ؛ لأننا لا نتمكن من قياس معدل هذه الطاقة . ولكنها مع ذلك فالنظرية اعطت تفسيراً مجهرياً لدرجة الحرارة : وعززت العبارة الشرموداينميكية (بأن تساوي درجة الحرارة بين نظامين في حالة اتصال حراري هو شرط للاتزان الحرارى بينهها) .

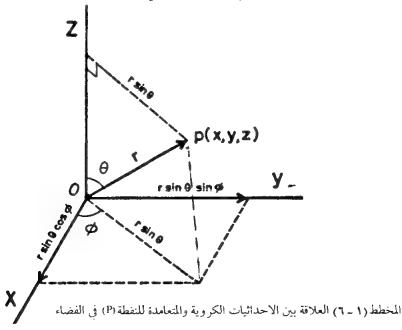
ان ارتباط الحركة العشوائية للغاز بدرجة حرارته تفسر لنا عدم ارتفاع درجة حرارته عند وضعه في بالون تحمله سيارة تسير بسرعة ٨٠٠٠ كم/ساعة او بمركبة فضائية تنطلق بسرعة ٨٠٠٠ كم/ساعة .

كذلك فان درجة حرارة الأجواء العليا تعتبر عالية اذا ما حسبت بهذه الطربقة ، مع العلم ان الشخص هناك لا يشعر بها بسبب قلة الطاقة الجزيئية التي تنقلها هذه الجزيئات القليلة للمجس الحراري بالرغم من سرعتها العالية .

كذلك فان هذه النظرية لا تميز بين الالكترونات والفوتونات وجزيئات الغاز ما دامت تتصرف طبقاً لمواصفاتها . وهذا يؤدي الى اخطاء كبيرة بسبب تباين الخواص المجهرية لهذه الجسمات .

#### (١ - ٥) - الاحداثيات الكروية للفضاء والسرعة : -

كثيراً ما يتطلب التناظر الموجود في الطبيعة (مثـل توزيع خواص الغـاز في الوعاء) ، الى استبدال الاحداثيات المتعامدة الى احداثيات كروية ، وما يرافقها من حساب لعناصر الحجم والمساحة ، ففي المخطط(١ ـ ٢).



نجد ان احداثيات النقطة (P) الواقعة في نهاية متجهة الموقع Y = (Radius Vector) محى (z,y,x) وهي ترتبط بالاحداثيات الكروية ( $\phi,\Theta,r$ ) بالعلاقات التالية :

 $x = rSin \Theta \cdot Cos \phi$ 

 $y = rSin \Theta . Sin \phi$ 

 $z = rCos \Theta$ 

 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ 

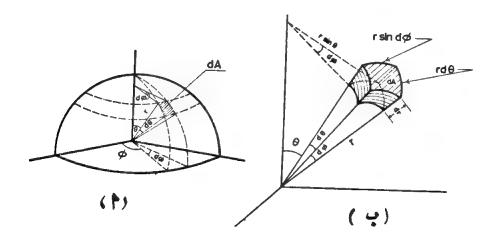
فيكون عنصر المساحة السطحية (dA) من كرة نصف قطرها (r) ومحصورة بين الزوايا 40'd (المخطط V - V) كالآتي :

$$dA = r d\theta \cdot r \sin \theta d\phi$$

$$dA = r^{2} \sin \theta d\theta d\phi \qquad \qquad (11 - 1)$$

 $\frac{dA}{r^2}$  وبما ان الزاوية المجسمة  $\Omega$  التي تقابل عنصر المساحة dA هو وجما ان الزاوية المجسمة dA

$$\therefore d\Omega = \sin\Theta d\Theta d\phi \qquad \qquad \dots (1 Y - 1)$$



المخطط (١ - ٧) - عنصر المساحة Ab وعنصر الحجم dV لأحداثيات

وتقاس الزاوية المجسمة بوحدات نصف قطرية مجسمة تسمى ستيريديان (Stradians) ويكون حجم عنصر الحجم dA dr = dV .

.. 
$$dV = dAdr = d^3r = r^2Sin \Theta d\Theta d\phi dr$$
 .. ( \Y - \)

وبذلك يكون حجم القشرة الكروية (Spherical shell) المحصورة بين نصف القطر r + dr, r تساوى : \_

$$dV = 4 \pi r^2 dr \qquad \qquad \dots \qquad (1\xi - 1)$$

ويمكن تطبيق هذه العملية على احداثيات كميات اخرى مثل فضاء السرع والزخم باستبدال المركبات المتعامدة لها c(u,v,w) عركبات c(u,v,w) عنصر الحجم في فضاء السرع مثلاً (ويرمز له $d^3c$ ) كالآتى : \_

 $d^3c = c^2dc \sin \Theta d\Theta d\phi$ 

وحجم القشرة الكروية في هذا الفضاء يساوي 4πc²dc اما العنصر الحجمي في فضاء السرع للاحداثيات المتعامدة فهوd³c = du dv dw

لو أخذنا كرة حجمها V تحتوي على N جزيئة ثم مدد اتجاه حركة هذه الجزيئات العشوائية الحركة لتلتقي في مركز الكرة ، فيكون عدد الجزيئات ( $dN\phi\Theta$ ) الجزيئات العشوائية الحركة لتلتقي في مركز الكرة ، فيكون عدد الجزيئات ( $dN\phi\Theta$ ) التي لها سرع محصورة بين الزوايــا (dO + dO + O + O ) يساوي (حيث التي لها سرع محصورة بين الزوايــا (dO + O + O ) .

$$dN \phi \Theta = \frac{N}{4\pi} d\Omega$$

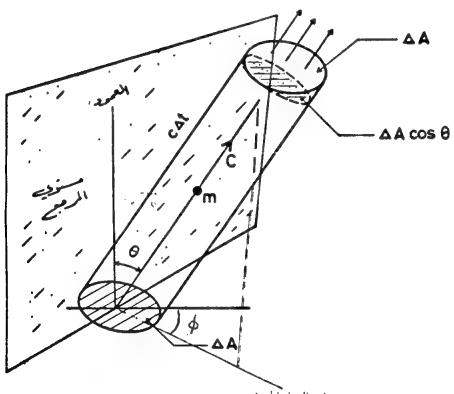
$$...dN \phi \Theta = \frac{N \sin \Theta d \Theta d \phi}{4\pi}$$
..... (10 - 1)

وبقسمة الطرفين على حجم الغاز V نحصل :

$$dn\phi\Theta = \frac{n \sin\Theta d\Theta d\phi}{4\pi} \qquad \dots (17-1)$$

حيث (n) الكثافة العددية للغاز .

ولو اردنا حساب السيل الجزيئي والذي يمثل عدد الجزيئات القادمة من جميع الجهات والساقطة على وحدة المساحة (على جدار الوعاء او ضمن الغاز) في وحدة الزمن ، فاننا نأخذ عنصراً من المساحة (dA) داخل الوعاء او على سطحه . ونرسم عموداً عليه (المخطط ١ - ٨)



المخطط (١ - ٨) - (حساب السيل الجزيئي) .

ثم غرر مستوياً خلال هذا العمود ، وعلينا حساب عدد الجزيئات بالاتجاه المحدد بالزوايا

 $(\phi + d\phi' \phi) (\Theta + d\Theta' \Theta)$ 

والتي سرعتها بين C + dc'C . نرسم اسطوانة طولها C عورها باتجاه C ونحصر المتامنا بالجزيئات ذات المواصفات  $(C,\phi,\Theta)$  التي تصل الى عنصر المساحة (dA) في زمن dt .

ونستبعد الجزيئات الأخرى القادمة من غير هذا الاتجاه وبهذه السرعة . وبما ان حجم الاسطوانة هذه يساوي dA . C . dt . Cos θ فان مجموع الجزيئات بالمواصفات (C,θ,φ) يساوي dNφθc أى :

 $dNC\Theta\phi = dNC\Theta\phi$ .  $dACdtCos\Theta$ 

$$= \frac{C dn_c}{4\pi} Sin \Theta Cos \Theta . d\Theta d\phi dt dA$$

و بما ان عنصر السيل  $dS_{00}$  للجزيئات ذات المواصفات ( $\theta,\phi,c$ ) هو  $dS_{00} = \frac{dN \; \theta \; \phi \; C}{d \; A \; dt}$ 

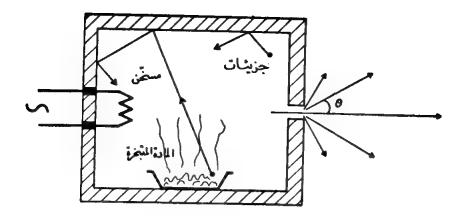
$$dS_{\theta\phi c} = \frac{cdnc}{4\pi} \quad . \quad Sin \, \Theta Cos \, \Theta d \, \Theta d \, \phi \qquad \qquad . \quad . \quad . \quad (1 \ V - 1)$$

فاذا كاملنا المعادلة (١ - ١٧) ليشمل جميع قيم الانطلاق والاتجاهات نحصل:

 $S = \frac{1}{4\pi} \int_{0}^{\infty} \int \frac{\pi^{2}}{\sinh \Theta \cos \Theta} d\Theta \int_{0}^{2\pi} d\Phi$ 

$$...S = \frac{nCAV}{4\pi}.1/2.2\pi = \frac{1}{4}nCAV \qquad .... (1A-1)$$

حيث  $\frac{1}{n}$  متوسط الانطلاق وتساوي  $\frac{1}{n}$  cdne وعموماً فان حزمة الجزيئات التي تسقط على عنصر المساحة لا تكون متوازية ، بل تنحرف بزاوية ( $\Theta$ ) عن استقامتها الأصلية \_ عند خروج الغاز من ثقب مثلاً \_ كها في شكل ( $\Theta$ ) .



المخطط (١ - ٩) - الحزم الجزيئة التي تغادر فتحة الفرن لا تكون متوازية

حينئذ يجب تحوير المعادلة (١ - ١٧) بدلالة الـزاوية المجسمـة (١١) لتصبـح بالصيغة :

$$\frac{dS(\Theta)}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{cdnc} \operatorname{Cos} \Theta$$

$$d\Omega = \operatorname{Sin} \Theta \, d\Theta \, d\phi$$

وبتكامل المعادلة اعلاه نحصل: \_

$$\frac{\Delta S(\theta)}{\Delta \Omega} = \frac{n \operatorname{CAV} \operatorname{Cos} \theta}{4\pi} \qquad \cdots (14-1)$$

وهي تعبر عن عدد الجسيات التي تغادر الفتحة ضمن زاوية مجسمة واحدة (ستيريديان)، حيث يبلغ السيل ذروته باتجاه عمودي على الفتحة ، وصفراً باتجاه عماس لها . وسوف نحتاج الى هذه النتيجة في دراستنا للانتشار (Diffusion) وللفوحان (Effusion) وللتبخر . . اللغ .

# (۱ - ۷) توزيع السرع بسين جزيئسات الغساز (قانسون ماكسويل لتوزيع السرع ) :

لقد افترضنا في نظرية الغاز المثالي ، بان جزيئاته تمتلك سرعاً تتراوح من الصفر الى ما يقارب سرعة الضوء ، ولكننا لم نتمكن من معرفة العدد النسبي لهذه الجزيئات ، ضمن أي مدى من السرع ، وبعبارة اخرى نحن نحتاج لمعرفة عدد الجزيئات التي سرعها بين c + dc,c

وهذا لا يتطلب الا لفرضيتين بسيطتين : الأولى : خضوع الجزيئات لقوانين الصدفة ، بسبب حركتها العشوائية . والشرط الثاني : الاتزان الشرموداينميكي للغاز في الوعاء . اي ان خواص الغاز متجانسة من نقطة لأخرى في الوعاء . فاذا كان عدد الجزيئات في الوعاء (N) وحجمه ٧ في درجة حرارة (T) ، فان عدد الجزيئات بالاتجاه السيني (x) ذات السرع المحصورة بين u + du ، u يعبر عنها بالعلاقة :

$$P(u) = \frac{dN(u)}{N} = f(u)du \qquad \qquad \cdots \qquad (\forall * - 1)$$

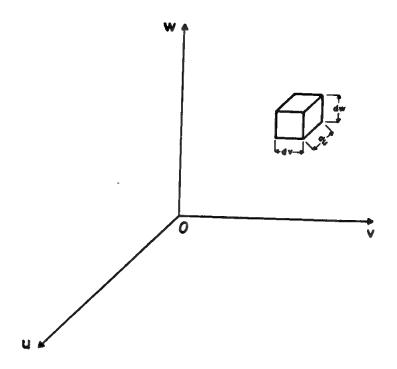
وتسمى الكمية (P(u) دالة توزيع الاحتمالية

. (Probability distribution function)

وهي تمثل كسر عدد الجزيئات ضمن هذا المدى من السرع بالاتجاه السيني(x) ويصح نفس الشيء بالنسبة للجزيئات المتحركة بالاتجاهين(y). (Z). ، وبذلك يكون العدد الكلي للجزيئات (d'N(c) التي سرعتها محصورة بين c + dc.c فرب الاحتاليات الثلاث اعلاه (راجع الفصل الثالث) .

$$...P = \frac{d^{3}N(c)}{N} = f(u)f(v)f(w) du dvdw \qquad .... (Y - 1)$$

وتمثل هذه المعادلة باحداثيات متعامدة للسرع (u,v,w) ويكون عنصر الحجم (dv) في هذا الفراغ (Velocity space) يساوي (dv) كما في المخطط (1 - 1)



المخطط (١٠-١) فضاء السرع بإحداثيات متعامدة

وتكون كثافة النقاط (ho) تساوي  $\frac{d^3N(c)}{dV}$  وهي كمية ثابتة بسبب الاتزان dV :

$$\rho = N f(u) f(v) f(w) = Constant$$
 .... (YY-1)

كذلك فان الانطلاق (C) يعبّر عنه بمركباته ، بالعلاقة .

$$C^2 = u^2 + V^2 + w^2 = Constant \qquad \qquad \dots \qquad (YY - 1)$$

لنفس السبب اعمالاه ، بسبب عدم وجود افضلية في الاتجاه والمقدار وبتفاضل المعادلتين الاخيرتين نحصل :

$$\frac{-1\partial f(u)}{f(u)\partial u}du + \frac{1}{f(v)} \frac{\partial f(v)}{\partial v}dv + \frac{1}{f(w)} \frac{\partial f(w)}{\partial w}dw = 0$$

$$u d u + v d v + w d w = 0$$

وبضرب المعادلة الأولى بالكمية  $m\beta$  (حيث  $\beta$  يسمى مضروب لاكرانج) ،  $m\beta$  كتلة الجزيئة . وبجمع المعادلتين الاخيرتين نحصل : m (La Grange multiplier)

$$\left(\frac{\partial f(u)}{f(u)\partial u} + m \beta u\right) du + \left(\frac{\partial f(v)}{f(v)\partial v} + m \beta v\right) dv + \left(\frac{\partial f(w)}{f(w)\partial w} + m \beta w\right) dw = 0$$

ولكون الحدود الثلاث في المعادلة الأخـيرة مستقلـة ، لذلك فان اي منهـا يساوي الصفر (لأن du,dv,dw لا تساوي صفر بالضرورة).

$$\therefore \frac{\partial f(u)}{f(u)\partial u} + m\beta u = 0$$

بالتكامل نحصل:

$$\begin{aligned} & \text{Ln } f \left( u \right) = \beta \left( \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{m}} \text{m} \, u^2 \right) + \ln A \\ & \therefore f(u) = A \, e - \beta \, \varepsilon_X \\ & \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{m}} \text{m} \, u^2 = \varepsilon_X \, \xi \, \text{ and } A \end{aligned}$$

وبنفس الطريقة نجد :

$$f(v) = Ae^{-\beta} \epsilon_y$$

$$f(w) = A e^{-\beta \epsilon_2}$$

$$\rho = NA^3e^-\beta\epsilon$$
 : ealine in the contraction of t

حيث:

$$1/2\,\mathrm{mC^2}=\epsilon=\epsilon\mathrm{x}+\epsilon\mathrm{y}+\epsilon\mathrm{z}$$
 (4  $\pi\,\mathrm{c^2}\,\mathrm{dc}$ ) يساوي (4  $\pi\,\mathrm{c^2}\,\mathrm{dc}$ ) وبما ان حجم القشرة الكروية في فضاء السرع يساوي

$$\therefore \rho = \frac{d N(c)}{4\pi c^2 dc} = NA^3 e^{-\beta \epsilon}$$

والمعادلة الأخيرة هي معادلة ماكسويل لتوزيع الانطلاق مع بقاء الثابتين B, A والمعادلة الأخيرة هي معادلة بالطريقة التالية :

$$N = \int_{0}^{N} dN(c) = 4\pi N A_{0}^{3} \int_{0}^{\infty} c^{2} e^{-\frac{\beta m c^{2}}{2}} dc$$

$$\int_{0}^{\infty} c^{2} e^{-a c^{2}} dc = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^{3}}}$$

$$A = \sqrt{\frac{m\beta}{2\pi}}$$
 : عيث :  $a = \frac{m\beta}{2}$ 

كذلك فان:

ولكن :

$$C^2 \text{ RMS} = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty C^2 d N(c)$$

وبالتعويض عن d N(c) وتكامل المعادلة الأخيرة نحصل على (راجع جدول المتفاضلات في آخر الكتاب)

$$C^{2}_{RMS} = \frac{3}{m\beta}$$

حيث:

$$_{0}\int_{c^{4}}^{\infty} \cdot e^{-ac^{2}} \cdot dc = \frac{3}{8} \left( \frac{\pi}{a^{5}} \right) \frac{1}{2}$$

ولكن للغاز المثالي :

$$\frac{1}{2} \text{ m C}^2 \text{ RMS} = \frac{3}{100} \text{ KT}$$

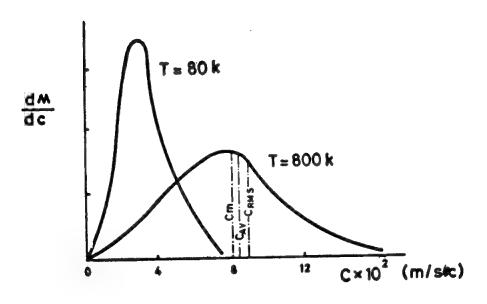
وبالتعويض عن قيمة CRMS نحصل :

$$..A = (\underline{\qquad \qquad }) \underline{\qquad \qquad }$$

وعليه فان قانون ماكسويل لتوزيع السرع يصبح بصيغته النهائية :

$$\frac{d N(c)}{dc} = 4\pi N \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} C^{2} e^{-\left( \frac{m c^{2}}{2kT} \right)} . . . . . . (Yo - 1)$$

والمخطط(١ - ١١) يوضح هذه الحالة لدرجات حرارية مختلفة . فنلاحظان ارتفاع درجات الحرارة يجعل المنحني يزحف نحو السرع الأعلى .



المخطط (۱ - ۱۱) قناة ماكسويل لتوزيع السرع لجزيئات الأوكسجين عند ۱۸ ك ، ۱۸ ك . ولحساب متوسط الانطلاق (CAV) لجزيئة الغاز المثالي ، نعوض بالمعادلة (۱ - ولحساب متوسط الانطلاق (CAV) لم ي العلاقة :  $\frac{1}{N_0} \int_0^\infty CdN(c)$ 

وعند التكامل نجد:

CAV = 
$$\sqrt{\frac{8 \text{ kT}}{m \pi}} = \sqrt{2.55 \frac{\text{kT}}{m}} = 0.922 \text{ C RMS} \cdot \dots (\Upsilon 7 - 1)$$

أما قيمة الانطلاق الأكثر احتمالاً (The Most Probable Speed) وترمز له (Cm) أما قيمة الانطلاق الأكثر احتمالاً ( $C^2 e^{-mc^2}/2kT$ ) ولا سيم المتغير ( $C^2 e^{-mc^2}/2kT$ ) فنحصل عليه من تفاضل المعادلة ( $C^2 e^{-mc^2}/2kT$ ) فنحصل :

$$Cm = (\frac{2kT}{m})^{\frac{1}{2}} = 0.8 CRMS \qquad (YV - 1)$$

لذلك فان:

CRMS > CAV > Cm

(راجع المخطط ١ - ١١)

ويمكن وضع معادلة ماكسويل بالصيغة الأبسط:

 $\frac{dN(x)}{dx} = -\frac{4N}{\pi^{1/2}}x^2e^{-x^2}$  (YA - 1)

حيث:

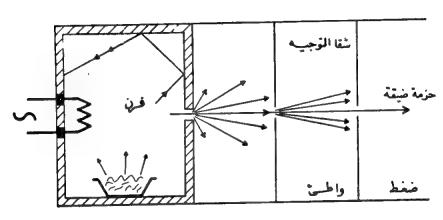
 $x = \frac{C}{Cm}$ 

## (١ ـ ٨) ـ تحقيق معادلة ماكسويل لتوزيع السرع تجريبياً ـ الحُزم الجزيئية : ـ

هناك طرق عديدة لتحقيق قانون ماكسويل لتوزيع السرع ، اهمها تعتمد على توليد حزم جزيئية (Molecular Beams) او ذرية متعادلة الشحنة ، لأن الحصول على حزم من الجسيات المشحونة عملية سهلة باستخدام المجالات الكهربائية او المغناطيسية . ويمكن توليد الحزم الجزيئية من تسخين بعض الفلزات مثل الفضة او السيزيوم او الثاليوم في فرن بدرجة حرارة مناسبة (المخطط 1 – ٩) والسياح لذراتها بالهر وب من ثقب صغير الى حيز مخلخل الضغط ، مستخدمين مفرغة هواء . وللحصول على حزمة ضيقة ، نستخدم مجموعة من الحواجز المثقوبة (المخطط 1 – ١٤) والرجعنا الى المعادلة (١ – ١٧) ، فان عدد الجسيات التي تسير بانطلاق (C) والتي تصطدم في وحدة الزمن على وحدة المساحة من وعاء والقادمة من جميع الجهات ( $\Phi$ .  $\Phi$ ) تساوي :

$$ds(C) = \frac{1}{4\pi} C d n (C) \int_{0}^{\pi/2} Sin \Theta Cos \Theta d \Theta \int_{0}^{\pi/2} d \phi$$

$$...dS(C) = \frac{Cdn(C)}{4} \qquad ..... (Y9-1)$$



المخطط (١-١٢) توليد جزم جزيئية - ذرية - ضيقة ومتعادلة الشحنة

ولحساب CRMS للجزيئات البتي تغادر الثقب من الفرن ، نستخدم الطريقة المألوفة والمعادلة (١ ـ ٢٥) :

$$dS(C) = \frac{1}{4} C dn(C) = \frac{4\pi n}{4} \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{\frac{1}{2}} C^{3} e^{-mC^{2}/2KT} dc$$

$$S = \frac{n C_{AV}}{4}$$

$$... C2 RMS = \frac{1}{s} \int_{0}^{\infty} C2 ds(C) = \frac{4kT}{m} .... (\Upsilon* - 1)$$

ويجب ان لا نلتبس بين هذه النتيجة وقيمة CRMS لجزيئات الغاز داخل الفر ن ويجب ان المنتبع بين هذه النتيجة وقيمة التي تهرب من الفتحة تكون اسرع والتي تساوي  $\frac{1}{2}$  لذلك فان الجزيئات التي تهرب من الفتحة تكون اسرع

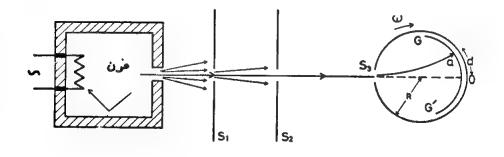
نوعاً ما من الجزيئات بداخل الفرن (او وعاء الغاز) وكما ذكرنا فان الحزمة التي تغادر الفرن لا تكون متوازية ، بل تتغير تبعاً للعلاقة (١ ـ ١٩) .

وهناك طرق عديدة لقياس سرع الجسيات في الحزم الجزيئية ، منها طريقة (زارتمان) ، و (كو) والتي هي تحوير لطريقة ستيرن (١٩٢٠) ، فهي تتكون من فرن وشقين ( $S_2,S_1$ ) لتحديد مقطع الحزمة الجزيئية (المخطط ١ – ١٣) والتي تسقط على اسطوانة تدور بمعدل ٢٠٠ دورة في الدقيقة حول محورها فاذا كانت الاسطوانة ماكنة ، فان الحزمة تسقط على النقطة (O) من خلال الفتحة ( $S_1$ ) . اما اذا كانت الاسطوانة تدور فان النقطة (O) تشغل محل (O) في نفس الفترة التي تقطع الجزيئة ذات الانطلاق (O) المسافة O2 (قطر الأسطوانة) .

$$aO = d = R\Theta = RWt$$

$$t = \frac{d}{RW} = \frac{d}{2\pi Rf} = \frac{2R}{C}$$

$$C = \frac{4R^2 \pi f}{d} \qquad \qquad \cdots \qquad (\Upsilon 1 - 1)$$



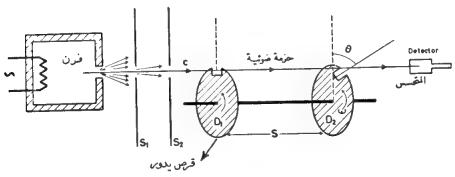
المخطط( ۱ – ۱۳ ) جهاز ازاتمان ، كو ، شتيرن ، لقياس سرعة وتوزيع الجزيئات

لذلك فان الجزيئات البطيئة تسقط بعيداً عن الموقع (O) في اللوح الزجاجي (GG') وبقياس اسوداد البقع على اللوح الزجاجي باستخدام فوتومتر مجهري (GG') والذي تتناسب قراءته مع عدد الجزيئات (DG') المحصورة بين الانطلاق (DG') وبذلك يمكن رسم منحني توزيع السرع .

وهناك طريقة اخرى لعد الجزيئات ضمن فاصلة السرعة (dc) ، إن احد هذه الهاذج (المخطط 1 ـ 12) يتكون من مُنتَقي السرعة (Velocity Selector) حيث تمر المخطط 1 ـ 25) يتكون من مُنتَقي السرعة  $S_2,S_1$  خلال فتحتين في قرصين الحزمة الضيقة بعد خروجها من الفرن والشقين  $S_2,S_1$  خلال فتحتين في قرصين وتصنعان زاوية ( $\Theta$ ) مع بعضها البعض وبدوران القرصين  $D_2,D_1$  بسرعة زاوية (W) م فان الجزيئة ذات الانطلاق (W) تمر بين الفتحتين في القرصين طبقاً للمعادلة :

$$\frac{S}{C} = \frac{\Theta}{W} = t$$

ويقوم المتحسس (Detector) بِعَدِّ هذه الجزيئات التي تمكنت من اختراق فتحتى القرصين .



المخطط ( ۱ - ۱۶ ) جهاز الجزيئات ذات السرعة المحصورة بين (c) ، (CAC)

وبما أنه لكل شق سعة معلومة ، فان الجزيئات التي تعبره لها مدى من السرع ( $\Delta C$ ) تقع حول السرعة (C) المقاسة . وبتغير قيمة (C) أو (C) يمكن امرار جزيئات ذات سرع اخرى . وبهذه الطريقة يمكن قياس توزيع سرع النيوتر ونات الحرارية التي تغادر المفاعل النووي بعد تلطيفها . فوجد بأن سرعها تخضع لقانون ماكسويل

ايضاً ، وهي حقيقة مهمة في تصميم المفاعل النووي . وهناك طريقة ثالثة تعتمد على انحراف مسار ذرات السيزيوم في الحزمة بتأثير الجاذبية الأرضية بعد انقذافها من الفرن ومرورها خلال شقين ضيقين ، فسوف تنحرف السريعة أقل من البطيئة ، ويقاس التيار المتولد من تأين ذرات السيزيوم عند سقوطها على سلك ساخن من التنكستون ، ليمثل تركيز الذرات في فاصلة السرعة  $\Delta C$  ، وتقاس  $\Delta C$  من قياس المسافة الشاقولية التي تقطعها ، ومن ابعاد شقوق الجهاز .

# (۱ ـ ۹) فقدان الطاقة بالتصادم الجزيئي مع جدار متحرك (مكبس)

يتولد الشغل في الغاز من انتظام جزء من جزيئاته باتجاه المكبس (او الجدار القابل للحركة). وهذه الخاصية تميز الشغل عن الحرارة ، (والتي تمثل مجموع الطاقة الفوضوية في الغازات) . فالغرفة مثلاً مملوءة بالجزيئات السريعة ولكنها لا تنجز شغلاً بسبب فوضويتها ! فلا يتم شغل بدون نظام !. ولتوضيح ذلك على النطاق المجهري نأخذ جزيئة من غاز محصور في وعاء فيه مكبس خفيف قابل للحركة افقياً (المخطط ١ - ١٥) ولنهمل الاحتكاك . ونفترض التصادم مرناً بين الجزيئة والمكبس ، فان سقطت الجزيئة بانطلاق (C) وبزاوية سقوط ( $\Theta$ ) وكان المكبس يتحرك بسرعة ( $\Psi$ ) فتكون المركبة العمودية لسرعة الجزيئة قبل التصادم تساوي يتحرك بسرعة ( $\Psi$ ) وبعد التصادم ( $\Psi$ ) وكلتاهم مقاستان بالنسبة لراصد في المختبر . لذلك فان الطاقة التي فقدتها الجزيئة للمكبس بالتصادم تساوي :

$$\Delta E = \frac{1}{2} m (C \cos \theta)^2 - \frac{1}{2} m (C \cos \theta - 2u)^2$$

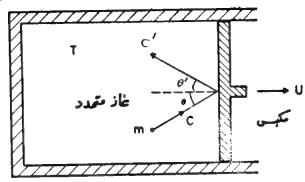
$$\approx 2mu C \cos \theta$$

وهذه تصح عندما تكون أقل بكثير من(C) .

ولحساب النقصان في الطاقة الحركية لجميع الجزيئات الساقطة على المكبس ومن جميع الاتجاهات ولجميع السرع نضرب المعادلة (١ ـ ١٦) مع المعادلة الأخيرة وبتكاملها لجميع الزوايا والسرع فنحصل:

$$\Delta KE = \int dKE = \frac{2mu}{4\pi} \int_{0}^{\infty} C^{2} dn(C) \int_{0}^{\sin \Theta} \cos \Theta d\Theta \int_{0}^{\infty} d\phi$$

$$\Delta KE = \frac{n m u}{2} CRMS^2 = \Delta W$$



الشكل (١ - ١٥) - الشغل الذي تنجزه الجزيئات المصطدمة بحبس المحرك

حيث الشغل الذي ينجزه المكبس (ΔW) يساوي النقصان في الطاقة الحركية للجزيئات ولكن الضغط للجزيئات (Δ K E) ، او نقصان الطاقة الداخلية ΔU لهذه الجزيئات ولكن الضغط الذي يولده الغاز (P) يساوي RM - 1 فاذا كانت مساحة المكبس (A) فان الزيادة في حجم الغاز في الثنية (ΔV) تساوي (Au) فتكون القدرة المنجزة تساوي (Fu) أو (P Au) . وسوف يبرد الغاز ما لم يزود بطاقة خارجية . ويجب ان نحذر الطالب من الخطأ الشائع ؛ وهو اعطاء درجة حرارة للجزيئة ، لأن درجة الحرارة من وجهة النظر الجزيئية هي خاصية لمجموعة الجزيئات وتتناسب مع معدل الطاقة الحركية . فالجزيئة بامكانها ان تمتلك طاقة حركية عالية او واطئة ولكنها لا تمتلك درجة حرارة عالية او واطئة ولكنها لا تمتلك درجة حرارة عالية او واطئة ولكنها المتلك درجة حرارة عالية او واطئة واطؤنة واطئة واطئة واطئة واطئة واطئة واطئة واطئة واطئة واطؤنة واطئة

فاذا كانت سرعة تمدد المكبس (u) أكبر من سرعة الجزيئة (C) فلا يمكن للجزيئات بالاصطدام بالمكبس ولا يُنجَزُ شغل ، ويكون التمدد حينئذ يعادل التمدد في الفراغ . وسيكون التغير في الطاقة الداخلية او الشغل المنجز صغيراً يقارب الصفر اذا كانت القوى الجزيئية مهملة .

#### ( أمثلة محلولة )

المثال (١) : وعاء حجمه لتراً واحداً يحتوي على غاز الأوكسجين بدرجة حرارة ٣٠٠ ك ، كثافته العددية في الظروف القياسية ٣ × ١٠ ° جزيئة / م٣ . وعلى فرض انه غاز مثالي ، احسب :

( السرعة الفعالة (CRMS) لجزيئته .

(ب) السيل الجزيئي .

(جـ) طاقة الجزيئة مقدرة بالالكترون فولت (إ. ف e.v. ف).

#### : الحل

$$1/2 \text{ m } C^2 \text{ RMS } = \frac{3}{2} kT$$

$$...CRMS = (\frac{3 kT}{m}) \frac{1}{2} \qquad .....(\bar{1})$$

ولكن كتلة جزيئة الأوكسجين (m)

$$m = \frac{M}{No} = \frac{32}{6.02 \quad 10^{26}} = 5.31 \quad 10^{-26} \text{ Kg}$$

حيث (M) هو الوزن الجزيئي للأوكسجين .

.. CRMS = 
$$(\frac{3 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300}{5.31 \times 10^{-26}})$$
  $\checkmark$  ≈ 482 m / sec

$$S = {}^{1/4} \text{ m CAV} \tag{$\checkmark$}$$

 $CAV = 0.922 CRMS = 0.922 \times 482 = 453 \text{ m/Sec}$ .

$$n = 3 \times 10^{25}$$
 m<sup>-3</sup>

$$S = 1/4 \times 3 \times 10^{25} \times 453 \approx 3.4 \times 10^{27}$$
 Collision Sec/m<sup>2</sup>

$$\epsilon = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300$$
 .... (->)

$$= 6.21 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$
 (J=2)

$$..\epsilon = \frac{6.21}{1.602} \frac{10^{-21}}{10^{-19}} = 0.04 \,\mathrm{e.v}$$

.. kT = 
$$0.026 \approx \frac{1}{40}$$
 e.v. !

مثال (٢) :

برهن ان معادلة الحالة للغاز المثالي يعبر عنها بالعلاقة :

$$P = (\gamma - 1) U / V$$

الحل:

: مكذلك ، كذلك f = 3 حيث f = 3 عدلك ، كذلك :

$$PV = 2U/f$$

$$\gamma = \frac{2}{f} + 1$$

حيث (f) هي عدد درجات الحركة الحرة .

: و بالتعويض عن 
$$f/2$$
 في المعادلة اعلاه نحصل على :  $\frac{f}{2} = \frac{1}{\gamma - 1}$  ال PV =  $(\gamma - 1)$  U

مثال (٣) :

اذا علم ان طاقة الفوتون في تجويف متزن حرارياً بدرجة حرارة (T) تساوي  $h\, \nu$  حيث  $(\nu)$  هو تردد موجته ، فبرهن ان الضغط (P) الذي يولده الفوتون يساوي ثلث كثافة الطاقة الاشعاعية . واذا اعتبرت اشعاعات الجسم الأسود توصف بالاحداثيات  $(T'\, V\, '\, P)$  فاشتق قانون (ستيفان ـ بولتزمان) .

الحل:

لقد برهنا للغاز المثالي :

$$P = \frac{1}{3} \frac{N}{V} m C^2 \text{RMS}$$

ولكن الفوتونات لها سرعة واحدة (C) وهي سرعة الضوء ، وان طاقتها ( $mC^2$ ) تساوي ( $h\gamma$ ) و بالتعويض في المعادلة الأخيرة نحصل على ضغط الاشعاع  $P_{\gamma}$  للفوتونات ذات التردد ( $\gamma$ ) .

$$P v = \frac{1}{3} \frac{N v}{V} \cdot h v \qquad (C = CRMS)$$

$$(mCRMS^2 = h v)$$

$$..P = \sum P_{v} = \frac{\sum N, hv}{3V}$$

(u كثافة الطاقة):

$$..P = \frac{1}{3} \quad \frac{U}{V} = \frac{1}{3} u$$

حيث abla n 
u h . 
u = U وهي الطاقة الداخلية للفوتونات وباستخدام العلاقة

الثرموداينميكية التالية:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P$$

$$U = V . u$$
  $P = \frac{1}{3} u$ 

$$\frac{\partial U}{\partial V} = u$$
و بما ان (U) دالة لدرجة الحرارة (T) فقط:  $\frac{\partial U}{\partial U} = u$ و بما ان (U) دالة لدرجة الحرارة (T) فقط:  $\frac{\partial U}{\partial U}$  ان (U) دالة لدرجة الحرارة (T) فقط:  $\frac{\partial U}{\partial V}$ 

$$...u = \frac{T}{3} \frac{\partial u}{\partial T} - \frac{1}{3} u$$

$$\frac{du}{u} = 4 \frac{dT}{T}$$

 $u = b T^4$ 

المساولين الموتني

وبالتكامل نحصل على مع**دلة** ستيفان ـ بولتزمان التالية : ـ

كذلك نجد الاحداثيات الثرموداينميكية للغاز الفوتوني ، التالية : -

$$...P = \frac{b}{3} T^4$$

$$U = Vu = Vb T^4$$

$$...Cv = (\frac{\partial U}{\partial T})v = 4b VT^3$$

$$S = \int_0^T \frac{Cv dT}{T} = \frac{4}{3} b VT^3 \qquad (الانتروبي)$$

$$G = F + PV = 0, F = U - TS = -\frac{1}{3} b V T^4$$

حيث (G) تسمى دالة جبس (Gibbs Function) دالة هلمهولتز (الطاقة الحرة).

المثال (٤) : \_

وعاء مقفل يحتوي على ماء بحالة متعادلـة مع بخاره بدرجـة ٢٠٠ س. وضغط جو واحد . فاذا علم ان الحرارة الكامنة للتبخر في هذه الدرجة تســـاوى • ٢٢٥ جول/غم وافترضنا خضوع بخار الماء لقانون الغاز المثالي ، فاحسب : ـ (أ) الكثافة العددية لجزيئابت بخار الماء .

(ب) عـدد الجزيئـات المتبخـرة في وحـدة الزمـن من وحـدة المساحــة من سطحه

(جـ) قارن بين الطاقة الحركية الانتقالية لجزيئة بخار الماء مع الطاقة اللازمة لتصعبدها .

$$T = 373 \text{ k}, \text{ k} = 1.38$$
  $10^{-16} \text{ erg / k}$   $P = 1.03 - 10^6 \text{ dyne / Cm}^2$ 

$$..n = \frac{P}{kT} = 1.94 \cdot 10^{19} \quad \text{Molecule / Cm}^{3}$$

$$S = \frac{1}{4} \cdot n \cdot C_{AV}$$

$$C_{AV} = (2.55 \frac{kT}{m})^{\frac{1}{2}} \quad m_{2}O = \frac{18}{6.03 \times 10^{-23}} = 3 \times 10^{-23} \text{ gm}$$

$$...$$
 CAV = 680 m / Sec

$$...S = \frac{1}{4} \times 1.94 \times 10^{19} \times 6.8 \quad 10^{4}$$

$$= 3.4 \quad 10^{23} \quad \text{molecules / Cm}^{2} \quad \text{Sec} .$$

. كا الطاقة الحركية الانتقالية 
$$KT = KE$$
 الله الطاقة الحركية الانتقالية  $KT = KE$  الله الطاقة اللازمة لتصعيد جزيئات الماء في غرام منه  $\frac{No}{18} = \frac{No}{18}$  عم والطاقة اللازمة لتصعيد جزيئة منه =

لـذلك فان هذه الطاقـة تزيد بمقـدار ثهانية اضعـاف طاقتـه الحـركية الانتقالية !

الثال (٥) : -

برهن أن عدد الجزيئات التي مركبة سرعتها السينية المحصورة بين (صفر ، N Erf(x) : ساوي : (u

$$E \nu f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-x^{2}} dx$$

$$x = (\frac{m}{2kT} - )^{1/2} u$$

وتسمى (Error Function) بدالة الخطأ (Error Function) او متكامل الاحتالية . احسب عدد الجزيئات مركبات سرعة سينية محصورة بين  $\infty$  .

الحل:

لو رجعنا الى المعادلة (١ ـ ٢١) ومن معرفة قيمة A والتي تساوى :

$$f(u) = Ae^{-mu^2/2kT}$$
 ,  $(4 - \frac{m}{2\pi kT})^{1/2}$ 

فيكون عدد الجسيات التي سرعتها بين u + du.u :

$$\frac{d N(u)}{N} = (\frac{m}{2\pi kT})^{1/2} e^{-m u^2 / 2KT_4} du$$

أو :

$$dN(u) = N \left( -\frac{m}{2kT} \right)^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, du$$

حىث :

$$dx = (\frac{m}{2kT})^{1/2} du$$
 ,  $x = (\frac{m}{2kT})^{1/2} u$ 

 $...dN(u) = \frac{N}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2} dx$ 

$$\int_{N(0,u)}^{N(x)} \frac{N}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-x^{2}} dx$$

.. N(o,u) = N erf(x).

ولكن مجموع الجزيئات بالاتجاه السيني يحسب بتكامل المعادلة اعـلاه من  $\overset{N(\infty)}{\int dN(u)} = \frac{N}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2} \ dx = N \ erf(\infty)$ 

ولكن قيمة دالة الخطأ بين (صفر  $^{\infty}$ ) هي نفسها تقريباً من صفر  $^{\infty}$  حيث تصبح قيمتها (راجع الجدول الملحق بالكتاب) تساوي  $\frac{1}{2}$ 

 $N(0,\infty) = \frac{N}{2}$ 

لذلك فان عدد الجزيئات في الاتجاه السيني والمحصورة سرعتها بـين (u,u) تساوى :

 $N(u,\infty) = N_{A}(0,\infty) - N(o,u)$ 

 $N(u, \infty) = \frac{N}{2} - N \operatorname{erf}(x) = N \left[ \frac{1}{2} - \operatorname{erf}(x) \right]$ 

مثال (٦) : -

استخدم قانون ماكسويل لتوزيع السرع ، لاشتقاق قانون (ريجاردسون) للانبعاث الالكتروني الحراري .

الحل: -

لوكان لدينا سطح بَعّاث للالكترونات مساحته (A) ودرجة حرارته (T) يعطى الكترونات بالاتجاه السينى ، فيكون عددها بين u + du,u .

 $dN(u) = N(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{1}{2}} e^{-\epsilon/kT}$  : خيث

edN(u) : ولكن كثافة التيار (dJ(u) الناتج من هذه الالكتر ونات يساوي Adt

N = nV وبما ان

حيث n), Audt = V) الكثافة العددية الالكترونية ، (e) شحنة الالكترون . وبالتعويض عن (n) واجراء التكامل نحصل على :

$$Jsat = \int_{0}^{J} dJ(u) = \frac{en}{(2\pi mkT)^{1/2}} \int_{\epsilon o}^{\infty} e^{-\epsilon} / KT d\epsilon$$

لأن

$$\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{m}} = \mathrm{udu}$$

. . Jsat = 
$$\frac{\text{enk}^{1/2} \ T^{\frac{1}{2}}}{(2\pi \ \text{m})^{1/2}} \ \text{e}^{-\epsilon_0 / \text{KT}}$$

حيث ( $\epsilon$ 0) هي الطاقة اللازمة لتحرر الالكترون من معدنه (ويساوي $\epsilon$ 0) حيث  $\phi$  تسمى دالة الشغل . Jsat . في المائية يقديم معادلة ريجاردسون بالصيغة النهائية :

 $Jsat = AT \frac{1}{2} e^{-e} \phi \int kT$ 

 $T^{\frac{1}{2}}$ و بالطبع فان هذه المعادلة تقريبية لأن العلاقة تعتمد على  $T^2$  وليست على وبالطبع فان هذه المعادلة تقريبية لأن العلاقة تعتمد على  $T^{\frac{1}{2}}$  وليست على الكون الألكترون لا يخضع لقانون ماكسويل ، بل لاحصاء (فيرمي ـ دايراك) .

## (اسئلة الفصل الأول)

١ ـ عرف ما يلي معززاً جوابك بالرياضيات :

متوسط الانطلاق ، الانطلاق الأكثر احتالاً ، جذر معدل مربع الأنطلاق .

٢ ـ ما مقدار الحرارة النوعية المولية للجوامد حسب النظرية الحركية
 للغازات ؟

(الجواب : 3R)

٣ ــ ما هي عيوب النظرية الحركية للغازات ، عدد الظواهر التي فشلت في تفسيرها .

- كم وحدة حركة حرة للجزيئات التالية مستعيناً بالجدول (١ ١) ؟
   (أ) جزيئة بخار الماء .
  - o \_ احسب : CRMS, CAV للتوزيع التالي لستة جسيات : N 1 2 2 1 (m / sec) C 5 7 15 20

(الجواب: ١١,٥/١١م/ثا، ١٢,٧م/ثا)

٦ ما الفرق بين الشغل والطاقة الحرارية حسب مفهوم النظرية الحركية
 للغازات ؟

وهل صحيح القول أن درجة حرارة جزيئة الهواء تساوي ٣٠٠ ك ؟

٧ ـ ما طول ضلع مكعب يحتوي على عدد من الجزيئات تساوي نفوس
 الوطن العربي (١٥٠ مليون) في الظروف القياسية ؟

(أ) احسب CRMS لجزيئة الهيليوم بدرجة ٣٠٠ ك .

(ب) في اية درجة حرارة تتساوى مع CRMS لجزيئة الأوكسجين ؟

(جـ) ما هو فرق الجهد اللازم لتعجيل ذرة اوكسجين أحادية التأين لتمتلك نفس السرعة هذه ؟

۱۰ \_ مکعب طول ضلعه ۱۰ سم یحتوی ۳ × ۲۲۱۰ جزیئة اوکسجین بدرجة ۳۰۰ ك . احسب : \_

(أ) معدل عدد الاصطدامات لوحدة المساحة في الثانية (السيل) على جداره .

(ب) ضغط الغاز (الجواب : ۳,۳۲× ۳۱۰ <del>سمر ثا</del> ، ۱,۲۲× ۱۰۰ جو . ١١ - برهن ان الطاقة الحركية الأكثر احتالاً ■€ تساوي نصف الطاقة الحركية للجزيئة التي تسير بالانطلاق Cm في توزيع ماكسويل .

ور (u) عصور (u) لغاز انطلاقه السيني  $\frac{dN}{N}$  الغاز انطلاقه السيني  $= 1.01\,\text{Cm}$  بين

الجواب : (۸۰و۲ × ۱۰ ۳۰)

ے : ناز مثالی آحادی الذرة یتمدد ادیباتیکیاً ، برهن أن : - 18 PV 5 / 3 = Constant,  $P\alpha$  C<sup>5</sup> RMS

١٥ ـ احسب مجموع الطاقة الحركية ، CAV لعشرة التار من غاز الهيليوم
 تحت ضغط ، ١° نيوتن/م٢ .

(الجواب: ١,٥ كيلوجول ، ٣٦٠ كيلومتر/ثا)

الزمن (السيل الجزيئي) بمركبة سرعة عامودية على السطح أكبر من (C) يساوي :

$$\frac{\text{n Cm}}{2\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \qquad C = X Cm$$

۱۷ - كرة مجوفة نصف قطرها ۱۰ سم بدرجة ۲۷ س ما عدا سم واحد منها بقي مبرداً ، تحتوي الكرة على بخار الماء تحت ضغط 1 و.ملم زئبـق . فاذا فرضنا بأن كل جزيئة بخار تصطدم بالسطح البارد تتكثف ، فها الزمـن الـلازم ليصبح الضغط ۱۰- ملم زئبق ؟

(الجواب: ٣,٢٦ ثانية)

۱۸ ـ وعاء رقيق الجدار حجمه ۷ يحتوي على (N) جزيئة فيه ثقب صغير مساحته (A) يتسرب منه الغاز الى الخارج ولا يعود اليه ، فها الزمن الـلازم لكي

يتفرغ نصف عدد جزيئاته ؟

(t = (4 V/ACAv Ln 2: (1 + el)

١٩ ــ وعاء حجمه ٢ لتر ضغط الهواء فيه ملي توريشللي واحد ، فيه ثقب
 مساحته ١٠ – ١٠ سم ٢ يتسرب اليه الهواء من الخارج بضغط جوي واحد .

احسب:

- (أ) عدد الجزيئات المتسربة الى الوعاء في ساعة واحدة .
  - (ب) ما مقدار زيادة الضغط بعد ساعة من الزمن .
  - (جـ) برهن ان الجزيئات المتسربة الى الخارج مهملة .

الجواب : ٧١٠ جزيئة ، ١,٦ ملي توريشللي

٢٠ ـ مفاعل نووي فيه فتحة في جداره تتسرب منها نيوترونات حرارية بدرجة ٣٠٠ ك سيلها ٤ × ١٦٠ نيوترون/م ثا. فيا الكثافة العددية لها ، وما الضغط الذي تولده على قرض انها غاز مثالي ؟

(الجواب : ۲٫۳۶ × ۱۰۰ نیوترون/م ۲٫۳۴ × ۱۰۰ نیوتن/م۲)

77 \_ يحتوي الفرن في الشكل (1-1) على البزموث (وزنه الذري 70 ) بدرجة 70 . وكان قطر الاسطوانة 10 سم وتدور بمعدل 10 . وكان قطر الاسطوانة 10 سم وتدور بمعدل 10 دورة/ دقيقة . جد المسافة بين جزيئات 10 10 الخاصة بها .

الجواب : (٣,٦ ملم) .

٢٣ ـ ان خطوط الطيف لها عرض محدود بتأثير ظاهرة (دوبلر) لذرات الغاز المتوهج المتحركة باتجاه خط النظر . برهن أن شدة الضوء التوزع على طرفي مركز الخط تبعاً للعلاقة :

 $I = Ioe - (m X^2 C^2 / 2 KT)$ 

حيث Io شدة الضوء في مركز الخط ، (X) البعد عنه مقدراً بوحدات الطول الموجى ، C سرعة الضوء .

٢٤ ـ برهن ان الضغط والكثافة تتغيران مع الارتفاع للجو الأرضي على
 فرض ثبوت درجة حرارته (T) تبعاً للعلاقة :

 $P = Pa e^{-(mgZ/kT)}$ 

 $In n_2 - In n_1 = \frac{mg}{kT} (Z_2 - Z_1)$ 

حيث n الكثافة العددية للجزيئات على ارتفاع Z .

ویلعب هذا المقدار دوراً مهاً فی  $C^2 \text{ AV} - C^2 \text{ AV} > 0$  . ویلعب هذا المقدار دوراً مهاً فی نظریة التراوح(Fluctuations) .

(ب) الكسر العددي بغض النظر عن قيمة  $\Theta$  وللزاوية  $\phi$  المحصورة بين  $^{\circ}$  .  $^{\circ}$   $^{\circ}$  .  $^{\circ}$   $^{\circ}$  .  $^{\circ}$   $^{\circ}$  .

۰-۱۰×۱,۷ : الجواب ۲-۱۰×۷,۲

بحیث dNc = kc dc بحیث (N) تتوزع دالتها بالصیغة جزیئات (N) بحیث (۲۷ ، c>c عند dNc = 0 . c>c>0

ارسم منحني التوزيع وجد CRMS ( CAV . .

 $0.0707\,C_0$  ،  $\frac{2}{3}\,C_0$  : خط مستقیم



المعالون الموتي

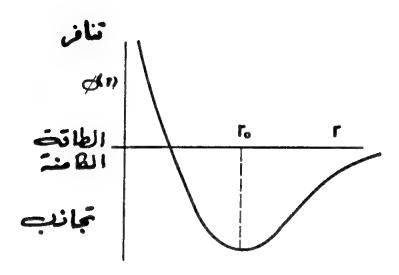
# ( الفصل الثاني ) « ظواهر النقل في الغازات »

(۲ - ۱) - تأثیر حجوم الجزیئات والقوی الجزیئیة علی تصرف الغاز الحقیقی (معادلة فان دیرفال) .

لقد افترضنا في الفصل الأول بأن جزيئات الغاز نقاط هندسية ومستقلة عن بعضها البعض ؛ أي أن حجمها والقوى بينها مهملة ، ولكن الغازات الحقيقية لا تتفق وهذه الفرضيات ولا سيا في الضغوط العالية او درجات الحرارة الواطئة حيث أن للجزيئات حجوم تؤثر على بعضها البعض بقوى معقدة بسبب التركيب المعقد للذرة والجزيئية . فعندما تكون الجزيئيات متباعدة تتجاذب مع بعضها بقوى (فان ديرفال) . وهي تتناقص سريعاً مع زيادة المسافة ، وتزداد مع الاقتراب حتى تبلغ ذروتها على بعد (م) يسمى (بعد الاتزان) ، ثم تبدأ قوى التجاذب تتضائل مع نقصان المسافة بينها بسبب قوى التنافر بينها ، بتأثير السحب الالكترونية لذرات كل منها ، فتتحول القوة بينها الى تنافر ، لذلك فان الجزيئات تمتلك طاقة كامنة بسبب القوى المتبادلة بين الجزيئات ، ويمكن تمثيل هذا التصرف بين جزيئتين بالمخطط - (٢ - ١) . لذلك تصبح الطاقة الداخلية للغاز الحقيقي بعضها حركية انتقالية والبعض الأخر طاقة كامنة عندئذ يجب استبدال معادلة الغاز المثالي : \_

$$p = \frac{N}{V} k T + \phi(r) \dots$$
 (<-<)

حيث  $\phi(r)$  كمية تتناسب مع الطاقة الكامنة للغاز بسبب القوى الجزيئية بين جزيئاته . ونلاحظ ان  $\phi(r)$  تكون سالبة وأقل من الصفر (تجاذب) في ظروف الغاز العادية ، حيث تهيمن حالة التجاذب بينها بسبب سرعها المعتدلة و  $\phi(r)$  تصبح موجبة عندما تكون السرع عالية .



الشكل (٢ - ١) - توزيع الجهد بين الذرات كدالة للمسافة (٢) بينها .

فلو فرضنا الدالة (r)  $\psi$  تمثل الطاقة الكامنة لجزيئة واحدة (او آيون) ، فاننا نتوقع ان تكون :

$$\phi(\mathbf{r}) = \mathbf{A}\mathbf{n}\,\psi(\mathbf{r})$$

حيث A ثابت ، (n) الكثافة العددية للغاز . وان مضاعفة (n) يؤ دي الى مضاعفة التصادم الجزيئي – كما سنرى في الفقرة القادمة – وهذا يؤ دي الى مضاعفة ( $\psi$ ) أيضاً ، لذلك فانه في حالة التجاذب بين الجزيئات ، تكون الدالة (r)  $\phi$  سالبة ونحصل :

$$\phi = -a' n^{2}$$

$$\therefore p = nkT - a^{1}n^{2}$$

$$= \frac{N}{V} (kT - \frac{a^{1}}{V})$$

المعادور في الموسي

$$(P + \frac{a^{1}}{v^{2}})v = kT$$
.....  $(\Upsilon - \Upsilon)$ 

لذلك فالحد  $\frac{a^1}{V^2}$  عثل التصحيح لمعادلة الغاز بتأثير القوى الجزيئية . ولغرض التصحيح لحجم الجزيئات ، نفترض أنها كرات صلبة قطرها (b) . لذلك فان أقرب مسافة ممكنة بينها هي (d) ويكون حجم الحيز الغير متيسر للجزيئتين تساوي  $\frac{4\pi d^3}{3}$  ، فان كان لدينا (N) جزيئة يكون الحجم الغير متيسر تساوي  $\frac{N}{3}$  . اما اذا كان لدينا مول من الغاز ، فان هذا الحجم يساوي  $\frac{2\pi \, \text{Nod}}{3}$  ونرمز له بالرمز (b) . حيث عدد أفه كادر و .

أما الحجم الفعلي الذي تشغله الجزيئات للمول الواحد ، فهو :

$$V_0 = \frac{4}{3} \pi (\frac{d}{2})^3 N_0$$

وعليه فان المعادلة (٢ ـ ٣) المصححة لحجم الجزيئات تصبح : ـ

$$\left[P + \frac{d'}{(V - b')^2}\right] \left[V - b'\right] = kT$$

حيث  $\frac{a'}{No}$  وهو التصحيح لجزئية واحدة ، ونظراً لصغير الحيد  $\frac{a'}{(V-b')^2}$  زائد مقارنة بالحيد (p) فيكون تقيريب  $\frac{a'}{(V-b')^2}$  بالمقيدار  $\frac{a'}{V^2}$  ولا سيما وان (V) أكبير بكثير من (b) . لذلك فان المعادلة الأخيرة ، تحور بدلالة الحجم المولي (V) لتصبح : \_

$$(P + \frac{a^1 \ No^2}{V^2}) \ (\frac{V}{No} - \frac{b}{No}) = kT = \frac{R}{No}T$$

$$(P + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT \qquad (\xi - Y)$$

حيث(a) =  $a' No^2 = a' No^2$  وتسمى (a) بعادلة (فان ديرفال) نسبة الى العالم الهولندي الذي وضعها عام ١٨٧٣ . ولقد استخدمها الطالب كثيراً على الغازات الحقيقية في موضوع الثرموداينميكس لبساطتها النسبية .

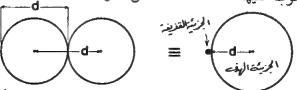
## (٢ - ٢) - التصادم الجزيئي ومتوسط المسار الحر: -

(Molecular collision and the mean free path)

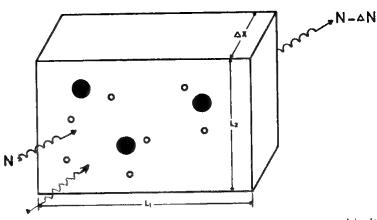
لوكانت الجزيئات نقاط هندسية تنعدم بينها القوى ، لاستحال التصادم بينها وانتشر الغاز سريعاً وبصورة آنية حال تحرره من الحيز الذي يشغله . ولكن التجربة تثبت عكس ذلك ، لأن جزيئات الغاز (العطور مثلاً) تأخذ وقتاً لوصولها الينا من المصدر ، مما يدل على انها تتصادم عشوائياً وبمسار متعرج ، وتسمى هذه الظاهرة بالانتشار (Diffusion) .

ولغرض دراسة الانتشار في الغاز نفترض ان جزيئاته كرات صلبة قطرها(b) تتصادم مع بعضها متى ما كانت المسافة بين جزيئتين (d) و يمكن ان نفترض العملية تكافىء تصادم جزيئة كبيرة ساكنة نصف قطرها (d) ، تسمى الجزيئة الهدف والأخرى تتقلص الى حجم النقطة وسريعة ، تسمى الجزيئة القذيفة (المخطط Y - Y). فيتم التصادم بينها متى كانت المسافة بين مركزيها (d) سواء كانت الجزيئتان متساويتين أم Y.

ولنفرض أننا اخذنا طبقة رقيقة من جزيئات غاز الهدف سمكها (dx) وابعادها  $L_2,L_1$  ثم نصوب عليها اعداداً هائلة (N) من الجزيئات النقطية (المخطط  $L_2,L_1$ 



المخطط (٢ ـ ٢) ـ التصادم بين جزيئتين متساويتين ، يعادل التصادم بين جزيئة نقطية واخرى قطرهـ ا ضعف قطـ الجزيئة .



المخطط (٢ ـ ٣) طبقة رقيقة من الجزيئات الهدف تتعرض للجزيئات القذائف

فلو فرضنا ان سمك الطبقة من الغاز الهدف قليل بحيث لا تختبىء الجزيئات الهدف وراء بعضها البعض ، فان أغلب القذائف الجزيئية سوف لا تصطدم مع الهدف ، ولكن كمية منها (dN-) سوف تصطدم بالهدف حيث :

$$-\frac{dN}{N} = \frac{\frac{dN}{n\sigma L_1 L_2} dx}{\frac{dN}{n\sigma L_1 L_2}}$$

$$\therefore \frac{dN}{N} = -n \sigma dx \qquad (6 - Y)$$

والكمية (Collision Probability) والكمية التصادم ( $\frac{dN}{N}$ 

سمك (طx) من المغار المنافع التصادم المجهري (لجزيئين) مقطع التصادم المنظور (المخافة العددية الجزيئية ، لذلك (n) (Macroscopic Collision Cross Section) فان حزمة من الجزيئات الساقطة وعددها N سوف تفقد N بالتصادم عند اختراقها سمك (N) من الغاز .

أي أن الجزيئات القذائف سينقص عددها بمقدار dN وبصورة متصلة (لوفرة العدد N).

$$..dN = -Nn \sigma dx$$

: نحصل 
$$N = No$$
 عند  $x = 0$  نحصل

$$N = N_0 EXP \cdot (n \sigma x) \qquad \qquad \dots \qquad (\Upsilon - \Upsilon)$$

وتسمى هذه العلاقة معادلة النجاة Survival Equation وتسمى هذه العلاقة معادلة النجاة Survival Equation وتسمى هذه العلاقة معادلة النجاة الغاز قدره (X) بدون تصادم أي أن (N) تغيل عدد المسارات الحرة (Free paths) أيضاً ، لأن كل جزيئة منها لم تعاني اصطداماً مع جزيئة الهدف . وبتفاضل (Y-Y) نحصل على (dN) والذي يمثل عدد المسارات الحرة المحصورة بين (X+dX), لذلك فالقيمة العددية الى (dN) تساوي : -

$$dN = No n \sigma EXP - (n \sigma x) dx \qquad (V - Y)$$

أما الاشارة السالبة في المعادلة الأخيرة فتشير الى نقصان عدد الجزيشات الساقطة بسبب التصادم .

ولحساب متوسط المسار الحر Mean Free Path)L للجزيئة والذي يمثل متوسط المسافة الحرة التي تقطعها الجزيئة بين تصادمين متتاليتين ، نكامل المعادلة التالية :-

$$L = \frac{1}{No} \int_{0}^{\infty} x \, dN(x)$$

$$L = n \sigma \int_{0}^{\infty} e^{-n} \sigma x dx = \frac{1}{n\sigma} \qquad (A - Y)$$

كذلك:

$$... L = \frac{1}{n\sigma} = \frac{kT}{P\sigma}$$

$$P = nkT$$
 نُان

لذلك فان متوسط المسار الحرتحت الشروط اعلاه ، لا يعتمد على انطلاق المجزيئات بل على درجة الحرارة T والضغط P بسبب المسار المتعرج للجزيئة عند تصادمها ، مما يعرقل انتقالها بعيداً من نقطة الأصل . ويمكن توضيح ذلك بتصورنا

صياداً يرمي بسيل من الرصاصات عشوائياً خلال غابة كثيفة الأشجار ، فبالرغم من عمله العشوائي ، فانه سوف يصيب بعضها ، ولا سيما الغليضة منها . وأن بعض الاطلاقات تخترق الغابة اكثر من غيرها ٍ. وأن متوسط المسافة المقطوعة ، تعتمد على كثافة الأشجار (n) بصورة عكسية وعلى كبر مقطع الساق (σ) .

$$...Z = \frac{C_{AV}}{L} = C_{AV} \cdot n \cdot \sigma \qquad .... (4 - Y)$$

حيث CAV هو متوسط الانطلاق للجزيئات .

$$CAV = \left(\frac{8KT}{\pi m}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad n = \frac{P}{KT}$$
 ولكن

لذلك فان (L) يتناسب طردياً مع (T) وعكسياً مع P (المعادلة P . P أما P فانها تتناسب مع P وعكسياً مع P .

ولنأخذ فكرة عن قيمة هذه المقادير ، نأخذ قطر الجزيئي ٢ × - ١٠م والكثافة العددية للجزيئات في الظروف القياسية تقارب ٣ × ١٠٠ جزيئة/م٣.

وان معدل سرعة الجزيئي بحدود ١٥٥٠م/ث فتكون قيمة  $Z = V \times V = V$  معدل مرعة .

أي أن (L) اقصر من طول موجة الضوء ! ولكنه يفوق المسافة بين الجزيئات (تقارب ٣ × ١٠ - ٢م) !

ولقد عولجت مسألة حساب متوسط المسار الحر من قبل عدد من الباحثين ، لأن الجزيئات المتصادمة تتحرك ، وان سرعتها تخضع لتوزيع ماكسويل . فلقد برهن العالم (جيمس جينز) بأن (L) تحت ظروف أكثر واقعية يعبر عنها بالعلاقة :

$$L = \frac{1.319}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{n\sigma} = \frac{0.93}{n\sigma} \qquad \dots \qquad (1.27)$$

وهناك حالات مهمة من التصادم في الفيزياء مثل تصادم الالكترونات بجزيئات الغاز . فيمكن اعتبار الالكترونات جسيات نقطية سريعة الحركة والجزيئات جسيات كبيرة بطيئة الحركة النسبية (جزيئات الهدف)، فيكون مقطع التصادم :  $\frac{d}{d}$   $= \frac{\sigma}{d}$ 

وعليه يكون متوسط المسار الحر للالكترون (Le) يعبر عنه :

$$...Le = \frac{4}{\sigma n} \qquad \cdots \cdots (11 - 7)$$

 $\frac{1}{Z}$  أما متوسط زمن المسار الحر ( au) فيساوي

#### (Trude Theory) نظرية در ود للتوصيل الكهر بائي (Drude Theory)

لقد استخدم العالم درود (١٩٠٠) نتائج النظرية الحركية للغازات ، لوضع تفسير لظاهرة التوصيل الكهربائي للمعادن . على فرض ان الالكترونات الحرة في الموصل تتصرف مثل الغاز المثالي . فاذا سلط مجال كهربائي (E) على الموصل فان الالكترونات تكتسب تعجيلاً قدره (a) طبقاً للمعادلة :

$$a = \frac{E.e}{m_e}$$
(i) Zine (iii)  $a = \frac{E.e}{m_e}$ 

(e) شحنة الالكترون)

$$\frac{a\tau}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{Cd} \operatorname{cond} \operatorname{cond} \operatorname{cd} \operatorname{cd}$$

وتسمى Cd سرعة الانحراف (Drift velocity) .

$$Cd = \frac{a\tau}{2} = \frac{E.e.Le}{2meCAv}$$

وهذه السرعة أقل بكثير من السرعة العشوائية للألكترون . ولكن كثافة

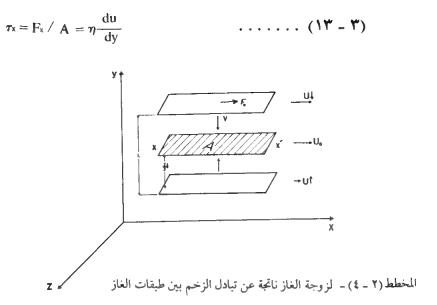
nee Cd = 
$$\frac{i}{A}$$
 = J : التيار الكهربائي :  $J = (\frac{ne \ e^2 \ Le}{2 \ me \ CAv})$  E  $\frac{E}{J}$  يساوي يساوي ولكن معامل المقاومة الكهربائية ( $\rho$ ) يساوي

$$\therefore \rho = \frac{2\text{me CAv}}{\text{ne, e}^2, \text{Le}} = \frac{1}{2} \frac{\text{me CAv } \sigma}{\text{e}^2} \quad (1 \text{ Y} - \text{ Y})$$

لذلك فان ( $\sigma$ ) تتناسب طردياً مع  $\sqrt{T}$  . ولكن التجربة تشير ان ( $\sigma$ ) تتناسب مع (T) تقريباً ، لذلك فإن نظرية درود تقريبية كها هو متوقع لأن الألكترون لا يتصرف مثل الجزيئة الغازية كها سنرى في الفصل الرابع .

#### (٢ - ٤) - معامل اللزوجة للغاز :

قد يتعجب المرء لأول وهلة ، كيف يمكن للغاز ، ذلك النظام المتباعد الجزيئات المرنة ، ان يمتلك خاصية اللزوجة او الأحتكاك الداخلي ، ولكنه من المعروف ان كل غاز حقيقي يمتلك لزوجة . ولكنها تزداد مع زيادة درجة الحرارة على عكس السوائل ، أي ان مصدر اللزوجة في الغازات هو ليس قوي الهاسك بين جزيئاته كها هو معروف في السوائل ، بل مصدره تبادل الزخم بين طبقات الغاز بسبب الحركة العشوائية لجزيئاته ، فالمخطط (٢ - ٤) يمشل جزءاً من صفيحتين كبيرتين في غاز ما المسافة بينهها (D) ، فبسبب لزوجة الغاز فاننا نحتاج الى تسليط قوة عاسة (٤x) على الصفيحة العليا لجرها الى اليمين بسرعة ثابتة (U) بالنسبة للصفيحة السفلى الساكنة (والتي تتطلب الى قوة مساوية ومعاكسة لابقائها واقفة). فاذا فرضنا ان الغاز ينساب نحو اليمين بانطلاق (U) فان انطلاقه يزداد كلها ابتعدنا عن السطح المسلك الساكن (القاع) ، ولو فرضنا ان الزيادة في السرعة خطية مع البعد (y) عن سطح الجدار ، فان اجهاد القص (Shearing Stress) يتناسب مع انحدار السرعة



حيث (A) مساحة الصفيحة (طبقة المائع) التي تؤثر عليها القوة الماسة x . وتسمى (x) معامل اللزوجة . ووحداته نيوتن . ثا/ x او داين ثا/ سم (ويسمى Poise) .

فاذا علمنا ان انطلاق جزيئة الغاز (C) العشوائي عالياً مقارنة مع انطلاق جريان الغاز (U) فان جزيئات الغاز تمتلك مركبات انطلاق (V) عمودية على اتجاه الجريان . وهذه الجزيئات التي تصل من السطح العلوي تنقل زخماً عند عبورها السطح الوسطي ('XX') ، اما الجزيئات التي تعبر السطح من الأسفل ، فانها تصله بزخم أقل من زخم الجزيئات عند هذا المستوى (على فرض ان سرعة الجريان تزداد نحو الأعلى) . . . ومن المفيد ان نشتق قيمة متوسط الارتفاع y = y عن السطح العلاقة (راجع المحل للجزيئات آخر عملية تصادم قبل عبورها له ، وسوف نستخدم العلاقة (راجع المصل الأول) (1 - 11) بعد تكاملها بدلالة  $\phi$  من صفر الى  $dS_0 = \frac{1}{2}$  Cav n Sin  $\Theta$  CosOdO  $\frac{1}{2}$ 

$$S = \frac{1}{S} \operatorname{nCAV}$$
 :  $S = \frac{1}{S} \operatorname{nCAV}$  :  $S =$ 

أي أن الجزيئات التي تعبر السطح الوسطي 'XX من الأسفل الى الأعلى او بالعكس ، قد عانت آخر تصادم لها على ارتفاع  $\frac{2L}{3}$  حيث (L) هو متوسط المسار الحر ، لذلك فاذا كانت سرعة جريان المائع عنى X'X تساوي ( $U_0$ ) فان سرعة جريان الجزيئات فوق وعلى ارتفاع  $\frac{2L}{3}$  تساوي  $U_1$  حيث :

$$U_{_1} = U_0 + \frac{2L}{3} \cdot \frac{dU}{dy}$$

: حيث  $(U_2)$  تساوي ( $x^1x$  وان سرعة جريان الجزيئات اسفل  $x^1x$  وعلى بعد

$$U_{2} = U_{0} - \frac{2L}{3} \frac{dU}{dy}$$

لذلك فان زخم الجزيئة التي تعبر السطح  $x^1x$  من ارتفاع  $\frac{2L}{3}$  تحمل زخمًا قدره (mU) ، وبذلك يكون زخم الجزيئات التي تعبر السطح  $x^1x$  من الأعلى في وحدة الزمن خلال وحدة المساحة فيه تساوى : \_

$$S.m.(U_0 + \frac{2L}{3} \frac{dU}{dy})$$

والزخم الذي يصله من الأسفل لوحدة المساحة في الثانية : ـ

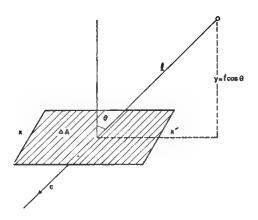
$$S.m(U_0 - \frac{2L}{3} \frac{dU}{dy})$$

لذلك فان محصلة الزخم الذي يصل السطح x1x في الثانية لوحدة المساحة فيه تساوى :

$$Sm - \frac{4L}{3} - \frac{dU}{dy}$$

وهذه الكمية تساوي القوة  $\frac{F_{x}}{A}$  حسب قانون نيوتن الثاني :  $\frac{F_{x}}{A}$ 

$$... \frac{F_x}{A} = \frac{4L}{3} mS ... \frac{dU}{dy}$$



المخطط ( ٢ - ٥ ) الجزيئة بدأت من مسافة تساوي متوسط المسار الحر (ا) قبل عبورها السطح

وبمقارنتها مع المعادلة (٢ ـ ١٣) نحصل :

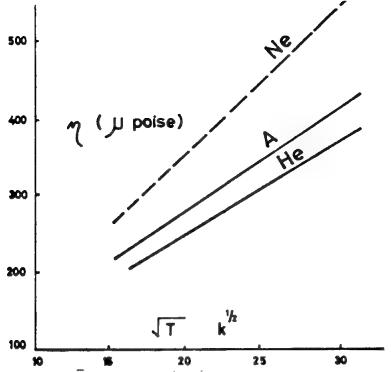
$$\eta = \frac{4}{3} LmS = \frac{Lm \, nCAV}{3} = \frac{1}{3} \frac{mCAV}{\sigma} \cdots (10 - 1)$$

وتشير الحسابات الأكثر دقة بأن:

$$\eta = \frac{\text{mCAV}}{2\sqrt{2} \sigma} = \frac{0.354\text{CAV}}{\sigma} \cdot \text{m}$$

وفي جميع هذه الحالات نلاحظ أن  $\eta$  تتغير مع  $\sqrt{T}$ . ولقد اثبت التجارب على الغازات A,Ne,He بأنها تتفق مع النظرية مع زيادة أكبر بقليل لقيمة  $\eta$  في درجات الحرارة العالية (الشكل  $\Upsilon$  -  $\Upsilon$ ) بسبب كون الجزيئات لينة تشبه كرة التنس حيث يصغر  $\sigma$  مع التصادمات القوية . كذلك فان  $\eta$  لا تعتمد على الضغط ، ما عدا حالة الضغوط الواطئة ، حيث يصبح ( $\Gamma$ ) يقارب أبعاد الجهاز ، فيندر التصادم حينة .

وتستخدم خاصية تغير اللزوجة مع الضغط الواطىء لقياس ضغط الغاز (P) . باستخدام مضغاط ذو شعرة الكوارتز المتذبذبة (المخطط ٢ - ٧) .



 $\sqrt{T}$  المخطط (٢ - ٦) - تكاد للوجة الغازات الأحادية الذرة تتغير خطياً مع

فاذا از يحت الشعرة بواسطة مغناطيس خارجي يؤثر على ابرة معلقة بالشعرة وتركت تهتز لوحدها ، فان الذبذبة تتلاشى بصورة أسسية ، فاذا قيست سعتين متتاليتين  $A_2,A_1$  لفترة نصف ذبذبة (t) فان :

$$\operatorname{Ln}\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = a + b \, P \, \sqrt{M} \qquad \qquad \dots \quad (17 - 7)$$
 
$$\operatorname{ermon} \operatorname{Ln}\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = \operatorname{hb} \operatorname{P}\left(\frac{A_1}{A_2}\right)$$

لغاز الـذي ضغطه (Logarithmic Decrement), b, a الوزن الجزيئي للغاز الـذي ضغطه الواطى (P) .

ويمكن وضع المعادلة (٢ ـ ١٦) بدلالة نصف مدة الذبذبة (١) :

$$P\sqrt{M} = \frac{A}{t} - B \qquad \cdots \qquad (1V - Y)$$

ولقد حُسِبَ قطُر الجزيئة لبعض الغازات من قياس ( $\eta$ ) في درجـة 10 س° وضغط جو واحد (الجدول  $\Upsilon$  \_ 1) .

NH <sub>3</sub>	Co,	0,	N <sub>2</sub>	Н,	Ne	He	الغاز
۹,٧	12,0	٧.	۱۷,۳	۸,٧١	41	19,8	۲۰/۰۰ ن ت/م
٤,٤٤	٤,٦	٣,٦	۳,٧٦	۲,٧٤	۲,٦	۲,۱۸	۰۱, × q
0,17	٤,١٩	ᡪ,∨٩	٦,٢٨	۱۱,۸	۱۳,۲	۱۸,٦	۰-۱.× ۲

الجدول (٢ - ١) ـ اقطار بعض الجزيئات محسوبة بدرجة ١٥ س° وضغط جو واحد .

## Thermal conductivity : التوصيل الحرارى للغاز : (۲ - ۵)

يمكن معالجة التوصيل الحراري في الغاز بنفس الأسلوب الذي عاملنا به اللزوجة مع استبدال تبادل الزخم بتبادل الطاقة الحركية للجزيئات وانحدار السرعة بالانحدار الحراري . ولا شك أن الطالب قد درس في موضوع الحرارة أن التيار الحراري (H) لوحدة المقطع (dQ/Adt) المنتقل خلال وسط معامل توصيل الحراري (K) وانحداره الحراري dT/dy يساوي .

$$H = -K \frac{dT}{dv} \qquad \dots (\Lambda - Y)$$

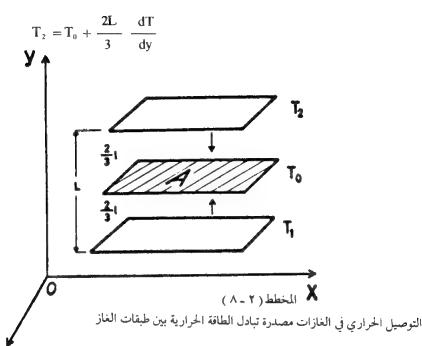
 $\frac{dT}{dv}$  ) يتجه نحو درجة الحرارة الواطئة (H) والأشارة السالبة تدل ان

سالب). الكوارة من منوسواندي منوسواندي المسواندي

المخطط (٢ - ٧) \_ مضغاط الكوارتز لقياس الضغوط الواطئة

#### ففي المخطط (Y \_ A) لو فرضنا ان T تزداد خطياً مع (y) فان

$$T_1 = T_0 - \frac{2L}{3} \frac{dT}{dv}$$



حيث  $T_{\rm s}$  هي درجة حرارة الغاز في المستوى الوسطي . ولكن طاقة الجزيئة الواحدة تساوي  $T_{\rm s}$  لذلك فان الطاقة المنقولة في الثانية من السطح العلوي نحو وحدة المساحة للسطح الوسطي تساوي (  $\frac{fkT_2}{2}$  ) والطاقة الثانية التي تنقلها الجزيئة القادمة من السطح الأسفل خلال وحدة المساحة من السطح الوسطي تساوي : (  $\frac{kT_{\rm s}}{2}$ 

حيث:

$$S = \frac{1}{4} nCAV$$

.. 
$$H = -\frac{Skf}{2}(T_2 - T_1)$$

$$H = -\frac{2S K fL}{3} \frac{dT}{dy}$$

$$...K = \frac{2Sk fL}{3} = \frac{1}{6} nkfLCAV = \frac{fkCAV}{6\sigma} .... (19-7)$$

لذلك فان (K) تتناسب مع  $\sqrt{T}$  ولا تعتمد على الضغطاو الكثافة الغازية ، أي ان  $\sqrt{K}$  لا تعتمد على (T) بل تساوي  $\sqrt{K}$  حسب هذه النظرية .

وبعبارة اخرى تكون ( $\frac{KM}{\eta Cv} = 1$ ) ولكن التجربة تعطي قياً تتراوح بين 1,5 الى 1,5 لأغلب الغازات . وهذا الشذوذ يشير الى ان الجزيئات ليست كرات صلدة ، بل لينة تشبه كرة التنس . والجدول (1,5) يعطى قيمة (1,5) لبعض الغازات بدرجة الصفر س° .

#### - : (Diffusion) الانتشار (٦ - ٢)

لو وضع غازان (A,B) في وعاء يفصلها حاجز رقيق وكانا بنفس درجة الحرارة والضغط، ثم رفعنا الحاجز، لوجدنا ان جزيئات الغازين تمتزجان ببطء حتى يصبح الخليط منها متجانساً، وتسمى عملية امتزاج مادة او أكثر بسبب الحركة العشوائية للجزيئات بالانتشار، وهي تتم متى حصل انحدار في الكثافة او الانحدار الحراري بين الغاز. وتتعقد ظاهرة الانتشار بالتصادم مع الجدار، وبسبب جريان المائع بسبب فروقان الضغط وتفاوت سرع انتشار الجزيئات لمواد غتلة.

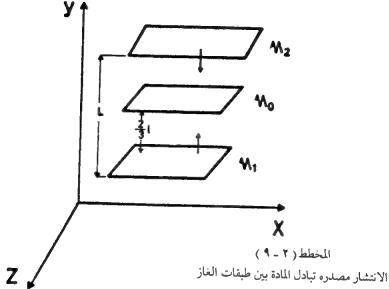
ان الانتشار بين مادتين مختلفتين أكثر فائدة من الانتشار الذاتي لجزيئات النظام الواحد . ويمكن تبسيط هذه المشاكل باستخدام وعاء واسع للتقليل من التصادم الجزيئي مع جداره ، وباستخدام جزيئات متقاربة الكتلة (المتاكنات لنفس العنصر مثلاً) .

ولاشتقاق معامل الانتشار، D للغاز ، نستخدم نفس الأسلوب السابق

(كيلو جول/كيلو مول ك)	Cv	(جول/م ثاك)	X	كغ/كيلو جول	M	الغاز
	12.6		0.141		4	Не
	12.7		0.0464 0.0163 0.168		20.18	Z <sub>e</sub>
	12.6		0.0163		40	Α
	20.6		0.168		2.016	H <sub>2</sub>
	20.9		0.241		28	Z
	21		0.254		32	0,
	28.3		0.145		44	C0,
	28		0.218 0.241		17	NH,
	20.8		0.241		29	Air

الجدول (٢ - ٢) بعض خواص الغازات الشائعة (بدرجة صفر سى)

ولكن باستبدال انحدار التركيز (Concentration gradient) بدلاً من انحدار السرعة او الانحدار الحراري ، ثم نحسب عدد الجزيئات التي تعبر وحدة المساحة في الثانية داخل السطح الوسطي A للغاز .



فان عدد الجزيئات في الثانية التي تعبر وحدة المساحة للسطح الوسطي قادمة من السطح العلوي تساوي  $S_2 = \frac{1}{2} n_2 \text{CAV}$  عيث  $S_2 = \frac{1}{2} n_2 \text{CAV}$  من السطح العلوي تساوي  $S_1 = \frac{1}{2} n_1 \text{CAV}$  ويكون صافي العدد الذي يمر خلال وحدة المساحة في وحدة الزمن من السطح (A) يساوي ( $\Gamma$ ) حيث :

$$n_2 = n_0 + \frac{2L}{3} \frac{dn}{dy}$$

.'. 
$$\Gamma = -\frac{1}{3} L CAV \frac{dn}{dy}$$
 
$$\Gamma = -D \frac{dn}{dy}$$
 : ولكن قانون (فيكس) للانتشار

حيث (D) هو معامل الانتشار الجزيئي .

... 
$$D = \frac{1}{3}L CAV = \frac{CAV}{3n \sigma}$$
 ....  $(Y - Y)$ 

أي ان معامل الانتشار يعتمد على  $\frac{T}{P}$  ، ولكن التجارب تشير الى ان D يعتمد على  $T^2$  حيث ان قيمة q تقارب  $T^2$  يعتمد على  $T^2$ 

وتلعب عملية الانتشار دوراً أساسياً في الطبيعة ، فبها تتبدد الملوثات وحبوب اللقاح والبكتريا والاتربة وبخار الماء ؛ ولكن الانتشار الدوامي (Eddy Diffusion) الناتج من الحركة المضطربة للهواء تفوق في كفاءتها (بقرابة °۱° مرة) الانتشار الجزيئي ، ولولاها لهات الكائنات الحية بسموم فضلاتها : كذلك فان للانتشار اهمية في تصميم المفاعلات النووية عند حساب ظروف الاتزان بين النيوترونات المتولدة في المفاعل والتي يمتص الجدار بعضها والبعض الآخر يهرب الى الخارج . ويستفاد من ظاهرة التفاوت في سرعة الانتشار بين ذرات اليورانيوم ۲۳۵ ، ۲۳۸ لفصلها : بامرار اليورانيوم الطبيعي على شكل غاز ، UF (سادس فلوريد اليورانيوم) خلال انبوبة مسامية طويلة .

#### (۲ - ۷) نظرية الحركة البروانية :

(Theory of the Brownian Motion)

ان المسار المتعرج الذي تسلكه الجسيات الصغيرة ـ مثل حبيبات الطلع او الغبار في الهواء : سببه التصادم العشوائي مع جزيئاته ، لذلك فان هذه الجسيات تنحرف ببطه بالرغم من انطلاقها (c) العالي ، قاطعة مسافة قدرها (x) في زمن (t) . وهذه الظاهرة موجودة في الغازات والسوائل على حد سواء . ولقد درست هذه الظاهرة نظرياً من قبل كل من اينشتاين (١٩٠٦) وسمولوخوفسكي (١٩٠٦) كل على انفراد ، وتوصلا اساساً الى نفس النتيجة . وسوف نتطرق الى النظرية بصورة مسطة .

لو تعقبنا الازاحة الأفقية (x) لجسيمة معلقة في الغاز او السائل فان القـوى

المؤثرة عليها بهذا الاتجاه : هي قوة التصادم Fx الجزيئي وقــوى اللزوجــة (bu) . لذلك فان التعجيل (ax) الذي تسير به يحقق المعادلة :

 $F_x - bu = max$ 

$$ax = \frac{du}{dt}$$
 ,  $u = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$  حيث  $ax = \frac{du}{dt}$ 

ويساوي( $\pi \eta r$ ) لجسيمة كروية تخضع لقانون ستوكس ، حيث ( $\pi \eta r$ ) نصف قطرها (اقل من مايكرون بالضرورة) .

وبضرب طرفي المعادلة بالمقدار ( × ) وايجاد المعدل للحدود الناتجة ، نجد ان وبضرب طرفي المعادلة بالمقدار ( × ) وايجاد المعدل للحدود الناتجة ، نجد ان  $\overline{\Sigma \times F \times}$  يساوي الصفر لأن X ، FX مستقلين مقداراً واتجاهاً ؛ بسبب الحركة العشوائية . كذلك  $\overline{\Sigma \times F \times}$  نخب  $\overline{\Sigma \times F \times}$  العشوائية . كذلك تصبح المعادلة البراونية بالصيغة :  $\overline{\Sigma \times F \times}$  لذلك تصبح المعادلة البراونية بالصيغة :

$$-\frac{1}{2}bs = \frac{1}{2}m\frac{dS}{dt} - kT$$

لأن  $S = 2KT / b + ce^- bt m : <math>\frac{1}{2} mu^2 = \frac{1}{2} kT$  ويكون حل  $S = 2KT / b + ce^- bt m$  ويكون حل  $S = 2KT / b + ce^- bt m$  فان  $\frac{b}{m}$  تقارب  $S = 2KT / b + ce^- t$  ثا ، كغم  $S = 2KT / b + ce^- t$  ثا ، كغم  $S = 2KT / b + ce^- t$  ثا ، كغم  $S = 2KT / b + ce^- t$  ثا ، كغم  $S = 2KT / b + ce^- t$  ثا ،

وهو عدد كبير ؛ لذلك فان الحد الأسسي في المعادلة مهم فقط في الفترات الزمنية القصيرة (اقل من مايكرو ثانية ) ويهمل للفترات الطويلة نسبياً .

$$S = \frac{2kT}{b}$$

فلو عوضنا  $\frac{dX^2}{dt}$  ، في المعادلة الاخيرة وكاملناها نحصل

$$X^2 = \frac{2kT}{h} \qquad \tau \qquad \cdots \qquad (Y - Y)$$

حيث  $(\tau)$  هي الفترة الزمنية التي يقاس بها متوسط مربع الازاحة  $(X^2)$  فاذا  $\frac{R}{N}$  عوضنا عن  $\frac{R}{N}$   $= 6.\pi \eta \cdot r \cdot k = \frac{R}{N}$ 

$$\overline{X^2} = \frac{RT \quad \tau}{3\pi \eta N_0 \cdot r} \qquad \dots \quad (\Upsilon \Upsilon - \Upsilon)$$

 $\overline{X}_2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} X^{2i} = \frac{1}{2} \tau L C$  AV كذلك يمكن وضع المعادلة الاخيرة بالصيغة

حيث (M) يمثل عدد المرات التي تقاس فيها الازاحة (X) لنفس الفترة الزمنية  $(\tau)$ . ولقد حقق هذه المعادلة عملياً عدد من العلماء ولا سيما من قبل العالم الفرنسي (بيرين) للاعوام  $(\tau)$  - 1917 ، وفورد لوند  $(\tau)$  ، وويستغرين 1919 ومليكان  $(\tau)$  ، واستخرج منها عدد افوكادرو ، بقياس  $(\tau)$  جسيمات معدنية (مثل الزئبق ، والفضة ، والذهب) معلقة في محاليلها الغروية .

كذلك درس اينشتاين تأثير الحركة البراونية على الازاحة الزاوية (الدورانية) مثل دوران سلك الكلفانومتر بسبب التصادم الجزيئي ، فحصل على المعادلات التالية : \_

$$ar{\Theta}^2=kT\, au$$
 /  $4\pi\,\eta\,r^3$  ( read and section of  $B^2=k\,T\, au$  /  $2\pi\,\eta\,r^2\,L$  ( read and section of  $B^2=k\,T\, au$  /  $B^2$ 

واذا طبقنا مبدأ تساوي اقتسام الطاقة فان طاقة المرونة الكامنة لسلك ملتوى بتأثير الحركة البراونية ( $\frac{1}{C}$   $\frac{1}{C}$   $\frac{1}{C}$  ) تساوي  $\frac{1}{C}$  .

$$O^{2} = \frac{kT}{C}$$
 ..... (۲۳ - ۲) حيث (۵) هو ثابت الليَّ للسلك =  $\frac{3 \dot{q} + 1 \dot{q}}{1 \dot{q}}$  الازاحة الزاوية (نقية)

#### \_ امثلة محلولة \_

(۱) اذا كان معدل المسار الحسر لجزيئة غاز يساوي ٢,٦٣ × ١٠٠ ° م في درجة ٢٥س ° ونصف قطرها ٢,٥٦ × ١٠٠ م ومتوسط سرعتها ٤٥٠ م / ثـا فاحسب :

(أ) ضغط الغاز . (ب) عدد الاصطدامات في متر قطعته الجزيئة في الغاز . (ج) عدد الاصطدامات في الثانية .

(الحل)

$$P = n kT$$
 ,  $L = 0.93 / \sigma n$  (1)

 $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J}$ , 298 K = T

$$\cdot$$
 P = 175.6. nt / m<sup>2</sup> d = 2x2.56 × 10<sup>-10</sup> m

$$1.8 \times 10^4 = \frac{1}{2.63 \times 10^{-5}} = \frac{1}{L}$$
 الطول المقطوع = 3.8 (ب) عدد الاصطدامات

$$Z = \frac{\text{CAV}}{L} = \frac{450}{2.63 \times 10^{-5}} = 1.72 \times 10^7 \text{ Collision / sec.}$$
 ( $\Rightarrow$ )

(۲) كلفانومتر ذو المرآة المعلقة ثابت لَىْ سلكه  $3 \times 10^{-7}$  داين سم / نقية (Radian) بدرجة حرارة  $70 \times 10^{-7}$  المحركة البراونية ؟

الحل:

$$\frac{\overline{\Theta^2} = \frac{kT}{C}}{\sqrt{\frac{1.38 \times 10^{-16} \times 300}{C}}}$$

$$\sqrt{\frac{1.38 \times 10^{-16} \times 300}{4 \times 10^{-6}}}$$

$$x = \Theta \text{ RMS} = 1.017 \times 10^{-4} \text{ Radian}$$
 (نقیة)  $x = \Theta \text{ RMS L}$  (نقیة)  $x = \Theta \text{ RMS L}$  ( $x = 300 \text{ K}$  ( $x = 1000 \text{ m}$  m)  $x = 1.017 \times 10^{-4} \times 1000 \approx 0.1 \text{ mm}$  (نقیة)

(٣) اذا علىم أن كثافة الهمواء في الظروف القياسية ١,٢٩ كغم / م ٣ ومتوسط انطلاق جزيئاتسه ٤٦٠ م/ ث . ومتوسط مسارها الحر ٤٦٠  $\times$  ٢٠  $\times$  م ، فها مقدار : ( $\times$   $\times$   $\times$  ) على فرض أن معدل الوزن الجزيئي  $\times$   $\times$   $\times$   $\times$  ، وأن جزيئاته ثنائية الذرة .

$$\sigma = \frac{0.93}{L \cdot n \cdot}$$
 ,  $m = \frac{M}{N_0} = \frac{29}{6 \times 10^{26}} = 4.85 \times 10^{-26} \text{ Kg} \cdot$ 
 $f = 5, n = \frac{\rho}{m} = \frac{1.29}{4.85 \times 10^{-26}} = 2.66 \times 10^{25} \text{ molecule } / \text{ m}^3$ 
 $\sigma = 5.47 \times 10^{-19} \text{m}^2 = 20.66 \times 10^{25} \text{ molecule } / \text{ m}^3$ 
 $CV = \frac{f R}{2} = \frac{5 \times 8.31 \times 10^3}{2} = 20.78 \times 10^3 \text{ J / K mole}$ 
 $D = \frac{1}{3} \text{ CAV . L.} = \frac{6.4}{3} \times 460 \times 10^{-8} = 9.83 \times 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{sec}$ 
 $K = \frac{f k \text{CAV}}{6\sigma} = \frac{5 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 460}{6 \times 5.47 \times 10^{-19}} = 0.00967 \text{ J / m . s . k}$ 
 $\eta = \frac{1}{3} \frac{\text{CAV m}}{\sigma} = \frac{460 \times 4.85 \times 10^{-26}}{3 \times 5.47 \times 10^{-19}} = 1.36 \times 10^{-5} \text{ nt . s / m}^2$ 
 $C(\xi)$ 

انطلقت مجموعة من جزيئات الاكسجين (M = 32) الحرة الحركة وبصورة

آنية في غازها بدرجة حرارة ٣٠٠ ك . فاذا كان قطر جزيئة الاكسجين عازها 1.5 م ، وكان متوسط المسار الحر لها 1.5 سم . فاحسب (أ) متوسط انطلاقها . (ب) ضغط الغاز . (ج) الزمن المستغرق لبقاء نصفها غير متصادم .

#### ( الحل)

تحسب كتلة جزيئة الاكسجين بالطريقة السابقة ، فنجد : -

$$m = 5.31 \times 10^{-26} \text{ Kg}$$
.  $CAV = \sqrt{\frac{2.55 \text{ kt}}{m}} = 444 \text{ m / sec}$ 

$$n = 0.93 / \sigma. L = \frac{P}{KT} \sigma = \pi d^2$$

 $P = 0.93 \, kT / L \pi d^2$ 

$$= \frac{0.93 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300}{3 \times 10^{-2} \times (3.6 \times 10^{-10})^2 \pi} = 0.315 \text{ nt } / \text{ m}^2$$

$$N = N_0$$
  $Exp - X / L$   $\frac{N}{N_0} = \frac{1}{2}$ 

$$In \frac{N}{N_0} = -\frac{X}{L} \qquad In 2 = \frac{X}{L}$$

$$X = L L_{n^2} = 2.079 cm$$

$$t = \frac{X}{CAV} = \frac{2.079 \times 10^{-2}}{444} = 4.68 \times 10^{-5} sec.$$

# « اسئلة الفصل الثاني »

- (١) عرف ما يلي : المسار الحر ، تردد التصادم ، الانتشار ، اللزوجة .
   واذكر العوامل التي تؤثر عليها في الغازات والسوائل .
  - (٢) ما الفرق بين:
  - (أ) لزوجة السائل والغاز ؟
  - (ب) الانتشار والفوحان (Effusion) ؟
- (ج) ضغط الغاز على جدار وعائه وضغطه بداخل الغاز المتزن حرارياً ؟ (٣) كيف تعين :
  - (أ) قطر الجزيئي للغاز ؟
  - (ب) قطر الجزيئي للجامد ؟
    - (جـ) عدد افوكادرو ؟
      - (ء) كتلة الجزيئي ؟

وما هي الافتراضات المطلوبة ؟

- (٤) اذا كان متوسط المسار الحر لذرة الهيليوم في غازها في الظروف القياسية
  - ۲۰ × ۲۰ م ، فها قطر هذه الذرة ؟
    - (الجواب: ۲,٤ انكستروم)
- (٥) غاز متوسط المسار الحر لجزيئاته ٥ سم ، انطلقت فيه آنياً ١٠ عجزيئة فاحسب عدد المسارات الحرة : \_
  - (أ) التي تزيد على ٥ سم . (ب) ١٠ سم . (ج) بين ٩,٤-١,٥ سم .
    - (الجواب: ۲۷۰۰، معفر)
- (٦) أنبوبة المذبذب المهبطي تبث الكترونات تيارهـا ١٠٠ مايكروأمبير ، يبقى منها بعد قطعها مسافة ١٠ سـم ، ٣٧ مايكرو أمبـير ، وكان ضغط الغـاز بداخلها ١٠٠ نيوتن / م٢ . فاحسب : \_
  - (أ) متوسط المسار الحر للاكترون.

(ب) التيار المتبقى لو انخفض الضغط الى النصف.

(الجواب : ١٠ سم ، ٦١ مايكرو أمبير)

- (۷) سلك نحاسي طوله ۲ م وقطره ۰,۱ ملم ومقاومته ۳ أوم ، وكثافته مادته  $۱۰ \times ۸,۹$  تكغم / م ۳و و زنه الذرى ۱۶ فاحسب :
  - (أ) متوسط الزمن الحر بين تصادم الالكترون وآيون النحاس .
    - (ب) متوسط المسار الحر للاكترون على فرض انه غاز مثالي .
- (جـ) زمن انجراف الالكترون عند مرور تيار في السلك قدره ٣/ ١ أمبير .

(الجواب : ۲۰۷ × ۱۰ –۱۰ ، ۷٫۷۸ × ۱۰ – ۱ م ، ۱۳۲ ثا )

(A) غاز مثالي بدرجة حرارة T وانحدار ضغطي صغير منتظم ، برهن أن

المعدل الزمني للتدفق المادي (السيل) باتجاه انحدار الضغط يساوي ( MCAV ) لوحدة المساحة ووحدة الانحدار الضغطي . 3kT

(٩) أنبوبة طولها ٢ م ومساحة مقطعها ١ سم تحتوي على غاز  $CO_1$  تحت الضغط الجوي ودرجة حرارة ٣٠٠ ك ، وان نصف هذه الجزيئات تحتوي على المتاكن المشع  $(C_{14})$  وكان الطرف الأيسر في البداية (0 = 1) يتكون بأكمله من  $(C_{14})$  المشع وتتناقض كثافته حتى تصبح صفراً في الطرف الاخير ، احسب : -

- (أ) الانحدار الابتدائي لتركيز الجزيئات المشعة .
- (ب) عدد الجزيئات المشعة التي تعبر الانبوبة من اليسار الى اليمين عنـ د منتصفها وبالعكس .
- (جـ) المعدل الزمني الابتدائي لانتشار الجزيئات المشعة عبر المقطع مقـدرأ بالجزيئات / ث ، مايكروغرام / ث .

جزيئة / م٣ ، جزيئة / م٣ ، الجواب : - ١٠ × ١٠,٢٢ ،

۲,۳۷ × ۱۰۱۰ + ۷,۷۵ × ۱۰۱۰ جزیئة / ث ، ۲,۳۲ × ۱۰۰ ۲۰۰۰ جزیئة / ثانیة / ثانیة / ثانیة / ثانیة / ثانیة / ث ، ۷٫۰ مایکروغرام / ث

(١٠) استخدمت الحركة البراونية لتعيين عدد افوكادرو في الماء فشوهدت حركة حسيمة نصف قطرها ١٠٥ انكستروم تقطع المسافات الافقية التالية في ٣٠ ثانية لكل حالة مقدرة بالمايكرون .

5.6 | - 47 | - 10.8 | 6.6 | 0 | - 9.8 | 19.1 | - 11.2 | 16 | - 4 | 15 | 0 | فادا كانت درجة الحرارة ٢٠س ومعامل لزوجة الماء ٢٠,٠ بواز فها قيمة الحرارة ٢٠س ومعامل لزوجة الماء ٢٠,٠ بواز فها قيمة الحرارة ٢٠س ومعامل لزوجة الماء ٢٠,٠ بواز فها قيمة

(الجواب ۲۰۵× ۱۰ ۳ جزيئة / غم مول .

المساور والموتي

متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة مكتبتي الخاصة على موقع ارشيف الانترنت الرابط الرابط https://archive.org/details/@hassan\_ibrahem



# الفصل الثالث

# رياضيات الميكانيك الاحصائي

# (٣ - ١) المقدمة:

يمكن وصف حركة الاجرام التي نلاحظها حولنا بنجاح ، باستخدام قوانين الميكانيك التقليدي (ميكانيك نيوتن) مثل قوانين الزخم والطاقة والقوة ، على اعتبار ان هذه الاجرام (او الجسيات) محددة الابعاد في الفضاء ويمكن ملاحظتها . ولقد طبقت هذه القوانين بنجاح على حركة الاجرام الساوية وكذلك جزيئات الغاز المتأثرة بصورة ضعيفة مع بعضها Weakly Interacting bodies لغرض وصولها الى حالة الاتزان بخصوص توزيع السرع والكثافة والضغط . . الخ .

ولقد افترض ان هذه التأثيرات بين الجزيئات تقتصر على فترات التصادم بينها او بينها وبين الجدار .

ولقد افترض ان جزيئات الغاز المثالي غير متميزة (Indistinguishable) لأنها غير محددة الموقع في الفضاء ، فليست لها سرع او مواقع محددة . اما الجسيات المثبتة في مواقفها (مثل السنرات في الهيكل البلوري للهادة) ، فانها تعتير متميزة (Distinguishable) لأنها تتذبذب حول مواقع محددة لها في الهيكل البلوري (Crystal lattice) .

ولقد اظهرت التجارب بان خواص الجسيات الأساسية (Fundamental particles) في الطبيعة (مثل الألكترونات والنيوترونات) او مجاميعها من الذرات والجزيئات ، تخضع لقوانين مقيِّدة اضافية مثل مبدأ تكميم الطاقة والزخم والفضاء والى قواعد الانتقاء (Selection Rules) والى مبدأ عدم الدقة وقانون باولى والى قوانين الامتصاص والانبعاث الفوتوني بين المادة والاشعاع .

ولقد ادت هذه القوانين الى ارغامنا على الاعتاد بصورة متزايدة على قوانين ميكانيك التكميم لكونها تفسر بشمولية ودقة أكبر تصرف مكونات المادة وخصائصها ، وبالرغم من ان ميكانيك التكميم يعتمد على بعض المفاهيم الفيزيائية البسيطة ؛ الا انه يعتمد على اللغة الرياضية المتقدمة بصورة أشمل .

ولقد طبّقنا بعض قوانين الميكانيك التقليدي في الفصل الأول على جزيئات الغاز المنفردة ، اما في الميكانيك الاحصائي فهو يتعامل مع أنظمة متعددة الجسيات ، وتنتفي الحاجة الى معرفة الخواص التفصيلية لكل جسيمة (مثـل التصادم بينها او بين السطح) . لذلك فيمكن حساب معدل الخواص المنظورة (القابلة للقياس) لتلك المادة (Macroscopic properties) بدون الحاجة لمعرفة الخواص التفضيلية لكل جسيمة وذلك نظراً لكون عدد الجسيات في النظام مفرطاً بحيث يمكن اعتبار (dN) من الجسيات صغير جداً مقارنة بالعدد الكلي (N) لجسيات النظام (System) ، ومع ذلك فان dN وغفير العدد . فمثلاً ان الملي لتر (سم ٣) من الغاز في الظروف القياسية يحتـوي على ما يقـارب ٣ × ١٠ ١٠ جزيئـة ، لهـذه الاعتبارات يمكن تكامل دالة dN على اعتبار انها دالة متصلة Continuous) (function . ولا تقتصر طريقة التحليل الاحصائي على الجزيئات بل تشمل الالكتر ونات والفوتونات وامواج المرونة (Elastic waves) في الجوامد . ودوال الموجة (Wave functions)) . وسوف نطلق على هذه الكميات عموماً اسم الجسيات (Particles) وتخضع الجسيات اعلاه الى ثلاثة انواع من الاحصاءات بسبب تفاوت خواصها : وسوف نتطرق في الفصل القادم الى النوع الأول المسمى احصاء ماكسويل \_ بولتزمان (Maxwell-Boltzmann Statistics) والمسمى عادة بالاحصاء التقليدي ، لأنه يطبق على الجزيئات بالدرجة الأولى . وسوف نستخدم منذ الأن مفاهيم التكميم ، لكونها تسهل على الطالب فهم الموضوع ، ولكي نعالج مواضيع اكثر شمولية . ولكن قبل الخوض في هذا الموضوع لا بد للطالب من التعرف الى بعض المفاهيم الاحصائية أولاً .

# (٣ ـ ٢) تعاريف احصائية اولية:

(أ) المجموعة (Assembly):

وهي كمية من المادة عدد جسياتها Nيكننا التعامل بها كوحدة لها خواصها المنظورة المميزة لها . ويقارب عددها No (عدد أفوكادرو) .

(ب) التجمعات الاحصائية

وهو عدد ضخم N يؤ ول الى ما لا نهاية من المجموعات Ni المعرفة في الفقرة

$$(N \rightarrow \infty) = \sum_{i=0}^{\infty} N_i$$
 : (أ) أي أن  $i = \infty$ 

فيمثل كل مجموعة كبيرة من الانظمة المتاثلة (مثل النقود أو الجزيئات)

(ج) الاحتالات المنفصلة 

Discrete probabilities

N على نفس المجموعة N لعدد N يقترب من اللانهاية من المرات .

 $\mathbf{N}$  - نجري تجربة قياس المتغير  $\mathbf{U}$  على تجمعات احصائية  $\mathbf{N}$ . وذلك بقياس قيمة  $\mathbf{U}$  مرة واحدة في كل مجموعة من التجمعات الاحصائية  $\mathbf{N}$ .

نلو أظهرت الطريقة الثانية الى  $N_1$  مجموعة (من التجمعات  $N_1$ ) القيمة  $N_2$  الله عموعة اعطت القيمة  $N_2$  فان  $N_3$ 

$$N = \sum_{i=1}^{i=\alpha} N_i = N_1 + N_2 + \dots + N_{\alpha} + \dots + (N-Y)$$

وبقسمة الطرفين على النحصل:

$$P_1 = P_2 + \dots P_{\alpha} = 1 - \sum_{i=1}^{\alpha} P_i \qquad \dots \qquad (Y - Y')$$

حيث  $\frac{Ni}{N}$  = Pi هي احتالية أخذ المتغير U للقيمة Ui في أي مجموعة Ni التجمعات الاحصائية Ni. (او كها نفضل ان نقوله احتالية وقوع الحدث المنفصل Ni وسمى العلاقة Ni بمعادلة الشرط المعياري ، وهي تبين ان المجموع الكلي لكافة الاحتالات في تجربة قياس قيمة المتغير Ni تساوي واحد .

كذلك اذا كانت ( $N_r + N_s$ ) هي عدد المجموعات التي تظهر الحدث ( $N_r + N_s$ ) مضافاً اليه عدد المجموعات التي تظهر الحدث ( $N_s$ ) ، فان احتالية وقوع احد الحدثين ( $N_s$ ) أو ( $N_s$ ) هو :

$$P(r \circ R s) = \frac{N_r + N_s}{N} = P_r + P_s \qquad (Y - Y)$$

### مثال محلول (١) :

عند الرمي العشوائي لقطعة نقود معدنية Coin منتظمة الشكل ، فانها سوف ترسو بأحد وجهيها الى الأعلى ، ففي هذا المثال حدثين مختلفين غير متلازمين ومتساويين في احتال الوقوع ، لذلك فالمعادلة (٣ ـ ٢) في هذا المثال تصبح :

$$P_1 + P_2 = 1$$
 
$$P_1 = P_2$$
 : example 2 : example 2 : example 3 : example 3 : example 3 : example 4 : example 3 : example 4 : example 5 : example 6 :

$$P_1 = P_2 = \gamma_2$$
 : نذلك فان

#### مثال (٢) :

عند الرمي العشوائي لزهرة النرد (Dice) مكعب الشكل ومنتظم مرقمة سطحه الست بالارقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ فسوف يرسو بأحد اوجهه الست الى الأعلى باحتالات متساوية :

$$P_1 = P_2 + \dots - \frac{1}{6}$$
  
 $P(1 \text{ OR } 2) = P_1 + P_2 = \frac{1}{3}$ 

(د) الاحتالات المترابطة (Joint probabilities)

لو فرضنا ان مجموعة N لها خاصيتين مستقلتين s ، r ومن الممكن اظهار

احدهما كل على حدة او كلتا الخاصيتين في نفس الوقت ، وذلك باجراء تجربة على تجمعات احصائية N للمجموعة (N) . فوجد ان، Nهو عدد المجموعات التي تظهر الحدث الأول (r) او الخاصية الأولى (r) بغض النظر عن اظهار او عدم اظهار الحدث الثان (S) . لذلك فان ن

$$P_r = \frac{N_r}{N}$$
 و  $P_s = \frac{N_s}{N}$  : لذلك فان :

فاذا كانت Ps تمثل احتمالية وقوع الحدث الثاني (s) فان Ps هو عدد المجاميع التي تظهر الحدثين (s).(r) في نفس الوقت فيجب ان تخضع للعلاقة : Nsr = PsNr

ومن تعريف الاحتمال المركب Prs نحصل:

...... (8-4)

$$Prs = \frac{N_{rs}}{N} = \frac{P_s N_r}{N} = P_s P_r$$

وبالمثل ، نلاحظ انه اذا كانت المجموعة (N) تظهر ثلاث احداث مستقلة t.s.r فانه من السهل اثبات احتمال وقوع الاحداث الثلاثة المستقلة في آن واحد من العلاقة :

$$P_{rst} = P_r P_s P_t \qquad \qquad \dots \qquad ( \circ - \forall )$$

حيث Pt هو احتال وقوع الحدث (١) بغض النظر عن وقوع او عدم وقوع الاحداث الاخرى . ولا تصح لحدتين غير مستقلين .

#### مثال:

لو فرضنا ان مجموعة (N) مكوّنة من زهرتي نرد فقط متاثلين في كل شيء عدا علامة صغيرة على احدهما لتميزه عن الزهر الآخر : لذلك نسمي الأول(a1) والثاني (a2) فالمطلوب حساب الاحتالية المترابطة Prs عند الرمي العشوائي للزهرين .

الحل : 
$$P_{s} = \frac{1}{6}$$
 ,  $P_{r} = \frac{1}{6}$  : بما ان الزهرين مستقلين :

$$P_{rs} - P_{r} P_{s} - \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

ای ان الحدتین (s) و (r) یثلان حدثاً من ۳۹ حدث محن

أما إذا لم نميّز بين الزهرين فان احتمالية الحصول على أي ترتيب معين عند الرمي العشوائي للزهرين المتماثلين هو ضعف النتيجة السابقة .

# (هـ) الاتزان الاحصائي: (Statistical equilibrium)

يقال عن أي تجمعات احصائية . انها في حالة اتزان احصائي لو ان احتمال وقوع اى حدث ثابت لا يعتمد على الزمن . فلو ان t,s,r هي أحداث تظهرهما المجموعة (N) وأجرينا التجربة على تجمعات احصائية N للمجموعة (N) في حالة اتزان ، لوجدنا ان القيم Pt.Ps,Pr . . ثابتة لا تتغير مع الزمن . فلو اعتبرنا مجموعة (N) ولتكن غاز مثالي مكون من (N) جزيئي محصور في النصف الأيسر من وعاء على شكل صندوق بواسطة فاصل وعند الزمن (to) ، ثم أزيل الفاصل ، ففي كل لحظة تالية يوجد حدثان يمكن لكل جزيئي من جزيئات الغاز ان يظهر احدها ، الحدث الأول هو تواجد اى جزيئي عند الزمن (t) في النصف الأيسر من الوعاء وهذا يحدث باحتالية قدرها (P(t) ، والحدث الآخر البديل هو تواجد نفس الجزيئي في النصف الأيمن من الوعاء باحتمالية قدرها (q(t) ، فمن الواضح ان P(t) + q(t) = I لكل قيم الزمن (t) ؛ كذلك P(to) = I بينها q(to) = o ؛ لانه في لحظة ازالة الحاجز او الفاصل كانت كل جزيئات الغاز في النصف الأيسر من الوعاء ، وفي اللحظات التالية يتغير كل من الاحتالين حيث(t) q بقل و (q(t) يزداد الى ان تتوزع جزيئات الغاز بالتساوى p=q=1/2في كل الوعاء . وذلك عندما يتساوى الاحتمالين q,p أي تصبيح وتظل هذه الحالة ثابتة لا تتغير مع الزمن ، ونقول حينئذ ان جزيئات الغاز في حالة اتزان احصائى .

# (و) توزيع ذي الحدين: (The binomial ditribution)

اذا اخذنا مجموعة (N) من الجسيات في حالة اتزان احصائي ولتكن المجموعة عبارة عن غاز مثالي تتكون من (N) جزيئي في وعاء حجمه Vo فالمطلوب حساب

قيمة الاحتالية (P(m) لوجود عدد (m) من جزيئات هذا الغاز في عنصر الحجم  $\Delta v$  وان عند الزمن 1 فلنفرض ان (p) هي احتالية وجود جزيئي واحد في عنصر الحجم  $\Delta v$  وان  $\Delta v$  و حجم الوعاء  $\Delta v$  و  $\Delta v$  و  $\Delta v$  و احتالية وجود نفس الجزيئي في بقية حجم الوعاء  $\Delta v$  و  $\Delta v$  و الواضح ان :

$$P = \frac{\Delta V}{Vo}$$
,  $q = \frac{V}{Vo} = I - P$ 

والتوزيع المطلوب هو ايجاد احتالية حدوث (P(m) بحيث يتحقى بوقوع حدثين مترابطين ومتلازمين ـ الحدث الأول هو تواجد (m) جزىء في عنصر الحجم  $\Delta V$  ولتكن (P1) والحدث الثاني هو تواجد بقية جزيئات الغاز وعددها (N-m) في الحجم (V0 -  $\Delta V$ ) ولتكن (P2) وهي احتالية وقوع الحدث الثاني ، فالحدث الأول هو حدث مترابط ويتم بتواجد (m) جزيئي في عنصر الحجم  $\Delta V$  ومن المعادلة العامة ( $\Delta V$  -  $\Delta V$ ) للاحتالية المترابطة يكون :

 $P_1 = pm$ 

كذلك فالحدث الثاني مترابط ويتم بتواجد (N-m) جزيئي في الحجم V وان احتالية حدوثه هو :

 $P_2 = q N - m$ 

غير ان التوزيع المذكور يتحقق بأكثر من طريقة واحدة ، فان عدد الطرق المختلفة لتحقيق التوزيع المطلوب تسمى الوزن الاحصائي Statistical Weight المختلفة لاحتيار لذلك التوزيع . ونرمز لقيمته بالرمز gm وهي تمثل عدد الطرق المختلفة لاختيار بخدلك التوزيع . ونرمز لقيمته مكون من (m) جزيئي من مجموع جزيئات الغاز N اي مجموعات مختلفة كل مجموعة مكون من (Permutations) للعدد (m) على العدد (N) ويرمز له Ncm انه يخضع لقانون التباديل (Permutations) للعدد (m) على العدد (N) ويرمز له

حيث:

$$gm = Nc_m = \frac{N!}{m!(N-m)!}$$
 ....  $(7-7)$ 

حيث! N هو مضروب العدد N ، وان كل واحدة من هذه الطرق المختلفة وعددها gm يقم باحتمالية قدرهما P, P وعلى ذلك فاحتمالية حدوث التسوزيع

المطلوب :

$$P(m) = g_m P_1 P_2 = \frac{\int !}{m (N-m)} P^m q^{N-m} \cdots (V-Y)$$

فلعمله تتكون من وجهين يكون  $\frac{1}{2}=p=q=\frac{1}{2}$  هلات للتالة m عددها بوجه واحد N-m (p) عددها بوجه آخر (q) . وتسمى العلاقة المتالة m عددها بوجه واحد (p+q) فان معاملة الحد الأخيرة دالة توزيع ذي الحدين . فلو مكننا ذي الحدين (p+q) فان معاملة الحد بالصيغة (p+q) يساوي (p+q) .

. ومن هنا توزيع ذي الحدين ( p+q )  $N=\sum_{m}N_{cm}Pm\,q\,N-m$  : لذلك فان

مثال : احسب قيم اتحتالات وقوع كل الأحداث المختلّفة التي تقع عنــد الرمي العشوائي لاربع عملات معدنية : ــ

الحل:

تحل المسألة بواسطة قانون توزيع ذي الحدين (المعادلة P - V) . حيث ان كل عملة عند الرمي العشوائي تظهر احدى الوجهين (حدثين) فان رسو عمله بوجهها الى الأعلى هو حدث أول ويقع باحتالية P وان رسوها يظهرها الى الأعلى حدث ثاني ويقع باحتالية P حيث P وحيث اننا نفترض تماثل كل العملات حدث ثاني ويقع باحتالية P حيث P وحيث اننا نفترض تماثل كل العملات وانتظام شكلها وعلى ذلك تتساوى قيمة كل من الاحتاليتين . وبالتعويض في المعادلة P (P) حيث P انحصل : P انحمال : P

ومن هذه المعادلة نجد قيم كل الاحتماليات المطلوبة :

$$P(0) = P(4) = \frac{1}{16}$$
,  $P_1 = P(3) = 4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$ 

$$P(2) = \frac{1}{8}$$
. P(2) + P(0) + P(1) + P(3) + P(4) = 1

$$\frac{4}{\sum_{m=0}^{\infty} P(m) = 1}$$
 : أي أن

أي أن مجموع احتاليات كل التوزيعات المكنة يساوي الوحدة . وهنا يثبت ان التوزيع متعاير (Normalized)

# ((ز) القيم المتوسطة الاحصائية (Mean statistical values)

لو فرضنا ان المتغير U في المجموعة N يأخذ القيم المحددة  $_1,u_2,u_1,u_3,u_4$  كانت نتيجة المشاهدات (Observations) على التجمعات الاحصائية N للمجموعة N (او تكرار المشاهدة عدد N من المرات على نفس المجموعة N) كانت كالأتي :

 $(u\alpha)$ عدد  $N_{\alpha}$  و  $(u_{1})$  و  $(u_{2})$  عدد  $(u_{1})$  عدد اظهرت النتيجة  $(u_{1})$  اعطت

$$\sum_{i=1}^{i=\alpha} N_i = N$$

: نان المتوسط الاحصائى  $(\overline{U})$  للمتغير (u) يعرف بالمعادلة

$$(\overline{U}) = \frac{N_1 U_1 + N_2 u_2 + \dots N_{\alpha} u_{\alpha}}{N_1 + N_2 + \dots N_{\alpha}}$$

$$\bar{\mathbf{U}} = \sum_{1}^{\alpha} \mathbf{p}_{\alpha} \mathbf{U}_{\alpha}$$

$$\mathbf{N}_{\alpha}$$

 $P_{\alpha} = \frac{N_{\alpha}}{N}$  حيث  $P_{\alpha} = \frac{N_{\alpha}}{N}$  هي احتمالية ان يأخذ المتغير (u) القيمة المحددة (u) في اي

مجموعة واحدة من التجمعات الاحصائية N. ولا بد لنا ان نؤ كد هنا ان المتوسطات الاحصائية لا علاقة لها بالمتوسطات الزمنية . كذلك اذا كانت (F(u) دالة اختيارية للمتغير (F(u) فان المتوسط الاحصائي F(u) للدالة (F(u) يعرف بالعلاقة :

$$\overline{F(u)} = \sum_{r=1}^{\alpha} P_r F(ur) \qquad \qquad \dots \qquad (4-Y)$$

كذلك نلاحظ ان المتوسط الاحصائي لمجمـوع الدالتـين (g(u),F(u) يســاوي مجموع الدالتين أي أن :

$$= \sum_{r=1}^{\alpha} \Pr_{r} F(u_r) + \sum_{r=1}^{\alpha} \Pr_{r} g(u_r) = \overline{F(u)} + \overline{g(u)}$$

كذلك فإن:

$$\frac{\Gamma = \alpha}{C f(u)} = \sum_{r=1}^{r=\alpha} c P_r f(u_r) = c \overline{f}$$

حيث (c) كمية ثابتة

 $\overline{f(u) \cdot g(v)} = \overline{f(u) \cdot g(v)}$ 

ونترك للطالب اثبات

(Deviation) الانحراف (ح)

الانحراف u في القيمة للمتغيرu هي بالتعريف تساوي مقدار الفرق بين قيمة المتغير u في مشاهدة ما . والقيمة المتوسطة الاحصائية  $\overline{u}$  لذلك المتغير ، أي ان :  $\Delta u = (U - \overline{U})$ 

نمن الواضح ان المتوسط الاحصائي للانحراف  $\overline{\mathbf{u}}$  يساوي صفر لأن :

$$\Delta u = (u - u) = u - u = zero$$
 ... (17-7)

لذلك لا يمكن استخدام الانحراف لاعطاء فكرة عن مدى تشتت القيم المختلفة للمتغير (u) عن القيمة المتوسطة ( $\overline{u}$ ).

# (ط) التشتت (Dispersion)

يسمى المقدار  $(\Delta u)^2$  بالتشتت في قيم المتغير (u) أو التغاير (variance) وهو يمثل متوسط مربع الانحراف للمتغير (u) . وهو كمية موجبة دائماً (لماذا ?) . وباستخدام المعادلة ((7-1)) نلاحظ ان :

$$(\Delta u)^{2} = (u - \bar{u})^{2} = u^{2} - 2 \underline{u} \, \bar{u} + \bar{u}^{2}$$

$$(\Delta u)^{2} = u^{2} - 2uu + \bar{u}^{2} = \bar{u}^{2} \, \bar{u}^{2}$$

$$(\Upsilon - \Upsilon)$$

فالتشتت في المعادلة الاخيرة لقيم (u) لا تساوي صفر الا في حالة واحدة وهي عندما  $u_r = \overline{u}$  قيم (r) . وتزداد قيمة التشتت  $\overline{\Delta u^2}$  عن القيمة الصفرية كلما بعدت قيم  $u_r = \overline{u}$  من  $u_r = \overline{u}$  هو معيار جيد لبعثرة قيم  $u_r = \overline{u}$  للمتغير  $u_r = \overline{u}$  المتغير  $u_r = \overline{u}$ 

# (ك) الانحراف العياري Standard Deviation

يعرف الانحراف العياري  $\sigma$  للمتغير u بانه الجذر التربيعي للتشتت أي ان  $\sigma = \overline{(AU^2)} \frac{1}{2} (\overline{U^2} - \overline{U}^2) \frac{1}{2} \qquad \qquad . . . (12-4)$ 

### امثلة محلولة :

(۱) - مجموعة (N) في حالة اتزان احصائي ، وان هناك حدثين مستقلين تظهرها جسيات المجموعة ، الحدث الاول تظهره احدى جسيات لمجموعة باحتالية قدرها q فالمطلوب حساب

أ \_ المتوسط الاحصائي n لعدد الجسيات التي تظهر الحدث الاول

 $\overline{(\Delta n)^2}$ ب عند التشتت في ذلك التوزيع

جـ ـ الانحراف العياري النسبي  $\frac{\sigma}{n}$  لذلك التوزيع

### الحل :

ان توزيع جسيات المجموعة N بين الحدثين المستقلين يخضع لقانـون ذو (v-v) . وهذه تعطي احتمالية (v-v) من الجسيات لمجموعة الحدث الاول : (v-v) . (v-v)

 $\overline{(n)}$  نستخدم المعادلة (n-1) لا يجاد المتوسط الاحصائي  $\overline{(n)}$ 

$$\frac{1}{n} = \sum_{n=0}^{N} P(n) n = \sum_{n=0}^{N} n C_{n}^{N} P^{n} q^{N-n}$$

لأن القيم 0,1,2..N كلها محتملة للمتغير N ويمكن كتابـة المعادلـة الاخـيرة

$$\bar{n} = P \frac{\partial}{\partial P} \sum_{n=0}^{N} C P^{n} q^{N-n}$$
.... (10-T)

وتتضح صحة الخطوة الاخيرة في المعادلة اعلاه باجراء العملية العكسية ، اي تفاضل جزئياً بالنسبة الى P ثم نضرب في P لنحصل على صورة المعادلة الاصلية الى  $\overline{R}$  وحيث ان مفكوك P+q يعبر عنه بنظرية ذات الحدين كالأتى :

$$(p+q)N = p^{N} + \frac{N}{1!}p^{N-1}Q + \frac{N(N-1)}{2!}p^{N-2}q^{2} +$$

$$=\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!} p^{n}q^{N-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \quad \begin{array}{c} N \\ C \\ n \end{array} p^{n} q^{N-n}$$

بالتعويض في المعادلة (٣ - ١٥) نحصل:

$$\overline{n} = p \frac{\partial}{\partial P} \sum_{n=0}^{N} P^{n} qN - n = P \frac{\partial}{\partial P} (p+q)^{N}$$

$$\vec{n} = Np(p+q)^{N-1} = NP$$

$$p+q=1 \qquad (N-r)$$

نلاحظ هنا سهولة تحقيق الشرط المعياري في توزيع ذو الحدين اذ ان

$$P(n) = \frac{N}{C} P^{n} q^{N-n}$$

$$\sum_{n=0}^{N} P(n) = \sum_{n=0}^{N} C_{n} P^{n} q^{N-n} = (p+q)^{N} = 1$$

$$(\Delta n)^2 = \overline{n^2} - \overline{n}^2$$
 نيكون (n) يكون (ب) لحساب التشتت في

$$\overline{(\Delta n)^2} = \overline{n^2} \cdot N^2 P^2$$
  $\overline{n} = Np$ نُ

$$\frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{N} p(n) n^2$$

و بنفس الطريقة التي استخدمت عند حساب  $\widetilde{\mathbf{n}}$  نجد :

$$\overline{n^2} = (p - \frac{\partial}{\partial p})^2 \sum_{n=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} p^n q^{N-n} = (p - \frac{\partial}{\partial p})^2 (p+q)^N$$

$$(p\frac{\partial}{\partial p})^2 = (p\frac{\partial}{\partial p})(p\frac{\partial}{\partial p})$$

وهي مفاعل تفاضلي Differential operator يعمل على الدائـ (P+q)N ، وباجراء العملية التفاضلية نجد :

$$n^2 = (P - \frac{\partial}{\partial P})^2 = (P + q)^2 = PN \{I + P(N - I)\}$$

وعلى ذلك فان قيمة التشتت تصبح :

$$\overline{(\Delta n)^2} = \overline{n^2} - N^2 P^2 = P. N. q \qquad \cdots \qquad (1V - V)$$

$$\frac{6}{2}$$
: الانحراف المعياري النسبي:

$$6 = \left\{ \left( \frac{\Delta n}{\Delta n} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{NP q}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

وعلى ذلك فأن قيمة الانحراف العياري النسبي هي

$$\frac{\theta}{n} = \frac{(NPq)^{\frac{\gamma_2}{2}}}{Np} = \left(\frac{q}{P_N}\right)^{\frac{\gamma_2}{2}} = \left(\frac{q}{P}\right)^{\frac{\gamma_2}{2}} N^{-\frac{\gamma_2}{2}} \dots (N-\frac{\gamma_n}{2})$$

 $N = 10^{24}$  أي ان الانحراف العياري النسبي  $\frac{6}{n}$  يتناسب مع  $N^{-\frac{1}{2}}$  وفي حالة  $N = 10^{24}$  نجد ان الانحراف العياري النسبي للتوزيع يساوي

$$\frac{6}{\bar{n}} = (\frac{q}{p})^{1/2} \cdot 10^{-12}$$

وهي قيمة صغيرة جداً ، ويكون عكس ذلك اذا كانت N صغيرة ، فمثلا في حالة N = 100 فان  $\frac{6}{10} = (\frac{q}{p})^{1/2}$  و  $\frac{10^{-1}}{10^{-1}}$ 

#### مثال ۲:

لوكررنا تجربة (أو لعبة) الرمي العشوائي لعدد خمسة من مكعبات الزهر (الزار) فالمطلوب حساب احتالية ظهور الرقم (٦) الى الاعلى في التوزيعات المختلفة التالية :

(أ) لزهر واحد فقط (ب) لزهر واحد على الاقل (ج) في زهرين فقط .
 الحل : نستعمل توزيع ذو الحدين (٣ ـ ٧) للاجابة على الجزئين (أ) ، (ج)

$$p\left(n\right) = \begin{matrix} N \\ C \end{matrix} \quad P^{n} \ q^{N \, - \, n}$$

لتكن (P) هي احتمالية ظهور الرقم (6) الى الأعلى في زهر واحمد لذلك فان  $P = \frac{1}{6}$  ولتكن  $P = \frac{1}{6}$  .  $Q = \frac{1}{6}$  .  $Q = \frac{5}{6}$  .

وأ) احتال ظهور الرقم (6) إلى الأعلى في زهر واحد فقط(1) بالتعويض عن q=5/6 p=1/6 , n=16 N = 5

$$p(1) = {C_1 (\frac{1}{6})(\frac{5}{6})^4} = \frac{5!}{1! \cdot 4!} \cdot (\frac{1}{6}) \quad (\frac{5}{6})^4$$

$$P(2) = {C_2} \left( \frac{1}{6} \right)^2 \cdot \left( \frac{5}{6} \right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \left( \frac{5}{6} \right)^5$$
 ( $\rightleftharpoons$ )

أما الجزء (ب) من هذه المسألة فالمطلوب حساب احتمال ظهور الرقم 6 الى الاعلى في زهر واحد على الاقل ، أي المطلوب حساب قيمة

Pi = p(1) or p(2) or p(3) or p(4) or p(5) = P'

$$\sum_{i=0}^{5} p(n) = p(o) + p^{i} = 1$$
 ومن معادلة الشرط المعياري

$$p(0) = C$$
 .  $(\frac{1}{6})^0$  .  $(\frac{5}{6})^5 = (\frac{5}{6})^5$ 

$$p^{t} = 1 - p(0) = 1 - (\frac{5}{6})^{5}.$$

# (٣ - ٣) مفاهيم اساسية في الميكانيك الاحصائي (تكميم الطاقة والزخم):

ان اعضاءنا الحسية تخبرنا ان الاجسام الكبيرة التي نلمسها او نراها ، تمتلك شكلا محدداً ومكاناً في الفضاء ، لذلك فاننا نلجاً الى طريقة الاستكال شكلا محدداً ومكاناً في مفاهيمنا . فنتصور ان الجسيات الاساسية للمادة تمتلك شكلا وحجماً ولوناً تشبه الكرة ، ولها نصف قطر وشحنة وكتلة ، ولكن التجربة اظهرت عدم صواب هذا التصور ، لان التصرف الحركي (Matter field) لهذه الجسيات يتطلب منا ربطها بمجال مادي (Matter field) مثلها نربط الفوتون بمجال كهر ومغناطيسي ، والفونون (Phonon) بمجال امواج المرونة في الجوامد . وان هذا المجال يصف الظروف الحركية للجسيمة ، مثل الطاقة والزخم . ولعل اول هذه العلاقات هي معادلة دي برولي (De Broglie) والتي تربط طول موجة المجال العلاقات هي معادلة دي برولي (Phenon) وطاقتها (ع) حيث

$$\lambda = \frac{h}{p}$$
,  $f = \frac{\epsilon}{h}$  .... (19-7)

وباستخدام العدد الموجي (Wave Number) ، حيث  $\frac{2\pi}{\lambda}$  والسرعة الزاوية  $k=\frac{2\pi}{\lambda}$  :  $2\pi\,f=\omega$ 

$$P = \hbar k$$
,  $\epsilon = \hbar \omega$  ...  $(Y - Y)$ 

و يمكن وصف المجال المادي للجسيمة بالاتجاه السيني (X) بدالة الموجة (X)  $\psi$  وهي تعتمد على طاقة الجسيمة (E) الكلية حيث

$$E(X) = \frac{P_X^2}{2m} + E_P(X) \qquad (Y - Y)$$

. الطاقة الحركية السينية ، (  $\frac{P_X^2}{2m}$  ) الطاقة الحركية السينية ، (x)

وتربط هذه الطاقة مع دالة الموجة ، معادلة شرود نكر الشهيرة للامواج المادية ، بصيغتها :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\epsilon p(x)\psi(x)=\epsilon(x)\psi(x) \qquad \qquad \dots \qquad (\Upsilon\Upsilon-\Upsilon)$$

وتعادل هذه المعادلة في الميكانيك التكميمي في اهميتها معادلة نيوتن  $\frac{dP}{dt}$  ) في الميكانيك التقليدي . أو معادلات ماكسويل في النظرية الكهر ومغناطيسية .

ففي حالة الجسيمة الحرة تكون الطاقة الكامنة صفراً ، وتصبح المعادلة (٣- ٢٢) بالصيغة :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2 \psi = 0 \qquad \dots \qquad (\Upsilon \Gamma - \Gamma)$$

$$k^2 = \frac{2m\epsilon}{\hbar^2}$$

(لاحظ ان k هو العدد الموجى وليس ثابت بولتزمان في هذه الفقرة)

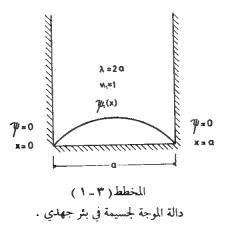
$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{h}{p}$$
 والمعادلة (۲۳ - ۳) ممثل معادلة موجة مستقرة طولها

ويمكن حلها بأي من الدوال الموجية المألوفة التالية :

$$\psi(X) = A e^{ikx}$$
 (موجة منتقلة الى اليمين)  $\psi(X) = A e^{-ikx}$  (موجة منتقلة الى اليسار)  $\psi(X) = A e^{-ikx}$  (موجة واقفة)  $\psi(X) = A e^{-ikx}$ 

. کمیتان ثابتتان  $\mathbf{B}$  ،  $\mathbf{A}$  ،  $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ حیث

فاذا اخذنا حاله الجسيمة المحصورة في بئر (أو صندوق) مثل جزيئة الغاز في الصندوق أو الالكترون الحر في قطعة معدن داخل حاجز جهدي الصندوق أو الالكترون الحرون الحركية للالكترون ، فان الالكترون يتحرك (Potential Barrier) يفوق الطاقة الحركية للالكترون ، فان الالكترون يتحرك داخل المعدن ، ولكنه لا يتمكن من الهروب منه ، فلو فرضنا ان دالة الموجة لكل داخل المعدن ، ولكنه لا يتمكن من الهروب منه ، فلو فرضنا ان دالة الموجة لكل منها تتلاشى عند X = a ، X = 0 ، حيث (a) هو عرض الصندوق بالاتجاه السيني ، فان المعادلة (X = x) تتحقق بالدالة (X = x) عدد صحيح موجب .



- 97 -

$$\mathbf{k} = \mathbf{n}_1 \cdot \frac{\pi}{2}$$
 : نذلك فأن

$$P = \hbar k - \frac{n_1 \hbar}{a} \qquad \qquad \dots \qquad (Y \circ - Y)$$

وهذه المعادلة توضح لنا ، ان الزخم مكمم (دالة متقطعة ) ، كذلك فان طاقة الجسيمة الحرة بالاتجاه السيني

$$\epsilon(x) = \frac{P_x^2}{2m} = n_1^2 \cdot \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \cdot \cdot \cdot \cdot (\Upsilon - \Upsilon)$$

اي ان الطاقة الحركية للجسيمة مكممة ايضاً ، اي ان دالة الطاقة والزخم غير متصلة ، وهذه حقيقة لم نألفها في الميكانيك التقليدي . فاذا كانت الجسيمة حرة الحركة في الاتجاهات (z.y.x) في الصندوق الذي أبعاده a,b,c فان دالة الموجة للجسيمة تصبح :

$$\psi = C \sin nt \frac{\pi x}{a} \sin n_2 \frac{\pi y}{b} \sin n_3 \frac{\pi z}{c} \dots (YV - Y')$$

وهي تشب معادلة الموجة المستقرة في تجويف مستطيل الشكل (Rectangular Cavity)

لذلك فان مركبات الزخم في الاتجاهات الثلاثة تصبح

$$Px = n I \pi \hbar / a$$
,  $Py = n_2$ ,  $h\pi / b$ ,  $Pz = n_3$ .

: ويصبح الزخم (P) الكلي  $n_3$  ,  $n_2$  ,  $n_3$ 

$$P^2 = P^2 x + P^2 y + P_2 z$$

وبذلك تصبح الطاقة الحركية للجسيمة الحرة هذه بالصيغة :

$$\epsilon = \frac{P^2}{2m} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left( \frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2} \right) \qquad ... (YA - Y)$$

: فاذا كان الصندوق مكعب الشكل (a = b = c) فان

$$\epsilon = n^2 \left( \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \right) \qquad \qquad \dots \qquad (\Upsilon \P - \Upsilon)$$

$$n^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$$
 ....  $(\Psi \cdot - \Psi)$ 

نلاحظ من هذه المعادلات بان الزخم والطاقة الحركية للجسيمة في صندوق تعتمدان على قيمة (n) فقط ، وهذا يعني ان جميع قيم  $n_3$ ,  $n_2$ ,  $n_1$  والتي تعطي نفس قيمة (n) هي حالات لنفس الطاقة والزخم ، بالرغم من تغير دالة الموجة لهذه القيم المختلفة والتي تعطي قيمة واحدة الى (n) ، وتسمى هذه الحالات المتساوية الطاقة بحالات التحلل ويرمز لتسلسل التحلل بالرمز (gi) لمستوى الطاقة) بحالات التحلل (gi) بمنوي الطاقة (ei) ، ففي الجدول (gi) توضيح لهذه المفاهيم للمعادلتين (gi) ، (gi) ، (gi) ، ففي الجدول (gi) توضيح لهذه المفاهيم للمعادلتين (gi) ، (gi) ، (gi) ، (gi) ، في الجدول (gi) ، (gi) توضيح لهذه المفاهيم للمعادلتين (gi) ، (gi) ،

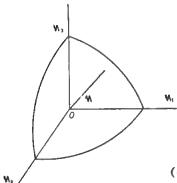
$\epsilon_1 = \frac{n n}{2m a_2}$	الجدول (۳- ۱)		
(الطاقة)	$\frac{(n_1,n_2,n_3)}{}$	n²	gi
3 € <sub>1</sub>	1, 1, 1,	3	1
6 e 1	(1.2.1), (2, 1, 1)(1, 1, 2)	6	3
9 €1	(2, 2, 1) (1, 2, 2), (2, 1, 2)	9	3
12 €₁	(2, 2, 2)	12	1

(طاقة الجسيمة في صندوق مكعب ثابتة المقدار ما دامت (n) ثابتة)

كذلك ففي المعادلة ( $\mathbf{r}_{-}$   $\mathbf{r}_{1}$ ) تزدحم مستويات الطاقة للجسيات المحصورة في صندوق كبير (لأن  $\mathbf{r}_{1}$  تتناسب عكسياً مع  $\mathbf{r}_{2}$  ) وتتباعد في الصندوق الصغير . كذلك فان  $\mathbf{r}_{1}$ ,  $\mathbf{r}_{2}$ , تكون موجبة دائياً ، ويمكن تمثيلها بأحداثيات متعامدة يكون نصف مقدار الكرة في هذه الفضاء هو ( $\mathbf{r}_{1}$ ) ، وعليه فان عدد الحالات ( $\mathbf{r}_{2}$ ) التي طاقتها تتراوح من الصفر الى ( $\mathbf{r}_{2}$ ) تساوي حجم ثُمُن هذه الكرة (المخطط  $\mathbf{r}_{2}$ ) (لأن  $\mathbf{r}_{2}$ ) ان يكون موجباً دائياً ) .

$$N(\epsilon) = \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} n^3$$

$$N(\epsilon) = \frac{8\pi V}{3h^3} (2m^3)^{1/2} \epsilon^{3/2} \qquad \cdots \qquad (\Upsilon 1 - \Upsilon)$$



المخطط (۳-۲) فضاء التكميم (۱/۸ الحجم منه موجب فقط)

حيث  $\frac{h}{2\pi} = V$ ,  $h = \frac{h}{2\pi}$  (حجم الصندوق) ، وعليه يكون عدد الحالات المحصورة بين الطاقة  $\epsilon + d \epsilon$ , تساوى

$$dN(\epsilon) = \frac{4\pi V}{h^3} (2m^3)^{1/2} \epsilon^{1/2} d\epsilon \qquad (\Upsilon\Upsilon - \Upsilon)$$

$$\frac{dN(\epsilon)}{d\epsilon} = g(\epsilon) = \frac{4\pi V (2m^3)^{\frac{1}{2}}}{h^3} \quad \epsilon^{\frac{1}{2}} \qquad \cdots \qquad (\Upsilon \Upsilon - \Upsilon)$$

وتمثل الدالة (ع) g عدد الحالات المتحللة التي طاقتها (ع) لفاصلة وحدة الطاقة . ومن المفيد احياناً ان نعبر عن (ع) g بدالة الزخم او التردد (f) فمثلا g للامواج الطويلة (في الجسم المرن مثلا)

$$g(f) = \frac{4\pi V \qquad f^2}{c^3} \qquad \qquad \dots \qquad (\Upsilon \xi - \Upsilon)$$

$$P = \frac{h}{\lambda}, f = \frac{C}{\lambda}$$

أما للامواج المستعرضة (الكهرومغناطيسية وامواج المرونة في الجوامـد) فان

المعادلة (٣ ـ ٣٤) تتضاعف قيمتها ، لأن لهذه الامواج ضعف الحركة الحرة . وسوف نستخدم هذه المعادلات كثيراً كها سنرى .

ومها كانت مستويات الطاقة متقاربة فلا زالت المستويات متميزة . وان من مهات الميكانيك الاحصائي هو تعين توزيع الجسيات بين هذه المستويات في حالة الاتزان الثرموداينميكي . أي اننا نريد حساب عدد الجسيات (ni) في مستوى الطاقة نا كان ذلك يمكننا عندئن من حساب معدل الخواص المنظورة (Macroscopic properties)

ان الحركة العشوائية والتصادم المستمر بين الجسيات وما يعقبها من تبادل في الزخم والطاقة تجعل الجسيمة تعاني تغيرات عديدة من حالة تكميم الى أخرى . وان من الفرضيات الأساسية في الميكانيك الاحصائي هو (ان جميع حالات التكميم للنظام المعزول متساوية الاحتالية في اشغالها من قِبَل جسيات النظام) .

# (Phase space) فضاء الطور (Phase space)

لقد سبق ومثلنا مركبات السرعة (w, v, u) باحداثيات متعامدة في فضاء السرعة ، كذلك مثلنا مركبات عدد التكميم (n<sub>3</sub>,n<sub>2</sub>,n<sub>1</sub>) باحداثيات فضائية على غرار احداثيات الأبعاد (z,y,x) لكونها وسيلة مناسبة لتوضيح بعض المفاهيم الفيزيائية . وليس من الضروري ان يكون لهذا التمثيل اي معنى فيزيائي ، بل انه

تجريد رياضي (Mathematical abstraction) وهذا يقودنا الى تمثيل أي عدد من الاحداثيات (مثل t,x,y,z في الميكانيك الاحصائي) فالنقطة في الاحداثيات (مثل x,y,z,u,v,w في الميكانيك الاحصائي) فالنقطة في الاحداثيات (x,y,z,u,v,w) تمثل موقع واتجاه حركة الجسيمة في لحظة من الزمن ويسمى هذا الفضاء ذو الستة ابعاد بفضاء الطور ولعل أبسط فضاء طوري هو حركة جسيمة كتلتها (m) باتجاه (x) وبسرعة (u) فان مسارها في هذا الفضاء يتحدد في بعدين (x) فلو كان الجسيم متصلاً بنابض ثابتة (k) ويتحرك حركة توافقية بسيطة باتجاه (x) فإن :

$$X(t) = A \quad \cos \omega t$$

$$\omega^{2} = k / m$$

$$u = \frac{dx}{dt} = -A\omega \quad \sin \omega t$$

$$\frac{x \cdot 2}{A \cdot 2} + \frac{u^{2}}{(A\omega)^{2}} = 1$$

المخطط (٣ ـ ٣) \_ المحل الهندسي لمسار دقيق في فضاء طور ذي بعدين ( X . U ) المخطط (٣ ـ ٣)

لذلك فالمحل الهندسي لحركة الجسيمة يكون مساراً بيضوياً Ellipse في فضاء الطور (المخطط ٣ ـ ٣) .

 $d^3r$  بالرمز. x, y, z, u, v, w ويمثل عنصر الحجم في فضاء الطور ذو الاحداثيات  $|d^3r.d^3c| = dx\,dy\,dz\,du\,dv\,dw$  :  $d^3c$ 

ويمثل r متجه الموقع (Radius Vector) ، ويمثل r متجه السرعة . واحياناً يستعاض ويمثل r مركبات السرعة بمركبات الزخم ( $(P_1,P_2,P_3)$ ) لتشمل الفوتونات (العديمة الكتلة) التي زخمها يسوى ( $\frac{hf}{C}$ ) حيث C سرعة الضوء . فمثلاً ان حجم الخلية في فضاء الطور هذا يساوي :  $H = dxdydz\,dp_1\,dp_2\,dp_3$ 

وبما ان  $dzdp_1 = dydp_2 = h = dxdp_1$  حسب مبدأ عدم الدقة . فان أصغر خلية في فضاء الطور يكون حجمها  $H - h^3$  وتكون كثافة الجسيات عند مستوى الطقة (i) في هذا الفضاء تساوي  $\frac{Ni}{h^3}$  حيث Ni هو عدد الجسيات التي طاقتها  $(\epsilon i)$ 

وعموماً فان عدد حالات التكميم dgi (التحلل) في فضاء الطور الثلاثي الأبعاد هو  $dgi = d^3 \underline{r} d^3 \underline{p} / h^3 \cdots (\ref{rown} - \ref{rown})$ 

وعليه فان عدد حالات التكميم المتاحة لمذبذب يتحرك ببعد واحد في المثال السابق يساوي  $\frac{dxdpx}{h}$  ويقال لحالات التكميم هذه بأن لها زخم متجه قيمته تقع ضمن المدى  $\frac{dxdpx}{h}$  ومحصور ضمن المتجهين  $\frac{dxdpx}{h}$  .

ولزيادة الايضاح يمكن مقارنة فضاء الطور بفندق نزلائه من الجسيات ، وتقابل خلايا الطور بغرف الفندق . وان طوابق الفندق تقابل مستويات الطاقة . لذلك فان عدد خلايا الطور في أي طابق يمثل التحلل 80 وبما ان بعض الحلايا مشغولة وبعضها فارغ ربمواقع مختلفة على غرار غرف طابق الفندق ، فبعضها أفضل من البعض الأخر (بنوعية الأثاث والسعة والموقع) كذلك فانها تتفاوت قليلاً في الأجرة ولكن للسهولة تؤجر الغرف بنفس السعر ، وهذا ما يقابله باختلافات طفيفة ( $\Delta \epsilon$ ) عن معدل طاقة الجسيات ( $\delta$ ) لأن مستويات الطاقة غير محددة بدقة بل تتفاوت سعتها بمقدار ( $\delta$ ) بحيث  $\frac{\Delta \epsilon}{\delta}$  صغيرة جداً بالنسبة للوحدة ، لذلك فان جسيات النظام تتوزع الى مجاميع عددها ( $\delta$ ) بالتوزيع ( $\delta$ ) النسبة للوحدة ، لذلك فان جسيات النظام تتوزع الى محاميع عددها ( $\delta$ ) بالتوزيع ( $\delta$ ) ميثرة مدة بالنسبة للوحدة ، لذلك فان جسيات النظام تتوزع الى محاميع عددها ( $\delta$ ) بالتوزيع ( $\delta$ )

# (٣ - ٥) - الحالات المجهرية والحالات المنظورة :

Microstates and macrostates

ان مفهـوم الحـالات المجهـرية (التفصيلية) والحـالات المنظـورة (الكبــيرة المحسوسة) يلعب دوراً كبيراً في توضيح الميكانيك الاحصائي .

و يمكن توضيحها باللجوء الى فكرة سكان (Population) مجاميع خلايا فضاء الطور . فلو فرضنا أن (gi) تمثل عدد خلايا فضاء الطور التي تعود الى المجموعة(i) التي طاقتها i وكها هي الحالة في غرف الفندق فبعضها مشغول وبعضها فارغ . وتعرف الحالة المنظورة (الماكر وستيت Macrostate ) للنظام ، بتحديد عدد نزلاء الخلايا في المجاميع (M) فهي تحدد مثلا بتعين عدد الذرات في كل مجموعة من الخلايا

(أي N<sub>1</sub>,N<sub>2</sub>..NM) ومن الواضح ان الحالة المنظورة هي توزيع (Distribution) في فضاء الطور ، فهي تعين مجموع الذرات وليست الكيفية التي تتوزع بها الذرات في كل مجموعة من الخلايا ، لذلك فهي تعرف (Define) الخواص المنظورة (القابلة للقياس) للنظام (غاز مثلاً) .

أما الحالة المجهرية (مايكروستيت Microstate) فهي تُعرَّف من تعين الكيفية التي تتوزع فيها الذرات بين خلايا فضاء الطور ، فهي تشبه احدى الكيفيات التي يتوزع فيها نزلاء كل طابق من الفندق .

ان الخواص القابلة للقياس (مثل الضغط ودرجة الحرارة) تعتمد على عدد الجسيات التي تتواجد في خلايا فضاء الطور المختلفة اما الحالات المجهرية فهي تشير الى عدد الجسيات وهويتها وبذلك فهي تعطينا تفاصيل اكثر من اللازم لغرض تعين الخواص المنظورة . وليس من الضروري ان يكون النظام بالحالة المجهرية الأكثر احتالاً بسبب حركة الجسيات المستمرة والتي تنقل النظام الى حالات مجهرية متغرة باستمرار .

وَبِمَا انْنَا نَقْتُصَرَ فِي تَحْلَيْلُنَا الى حالة الاتزان الاحصائي ، حيث تثبت فيها القيم القابلة للقياس تقريباً لاعداد هائلة من الحالات المجهرية ، لذلك يمكن القول ان الحالة المنظورة الأكثر احتالاً هي التي تحدث في حالة الاتزان الاحصائي .

ولتوضيح ما ذكر أعلاه يمكن الرجوع الى المخطط (٣- ٤) حيث تمثل مستويات الطاقة برفوف متفاوتة الارتفاع (٤) اما حالاتها المكممة (Energy quantum states) فتمثل بمجموعة صناديق على كل رف . اما التحلل(gi) في المستوى (i) فيمثل بعدد الصناديق في ذلك الرف ، والجسيات تمثل بعدد من الكرات مجموعها(N) . ويسمى عدد الكرات (Ni) في المستوى (i) بعدد الأشغال (ما عدا نظام الفوتونات) يساوي مجموع الجسيات في مستويات الطاقة أي :

$$i = M$$

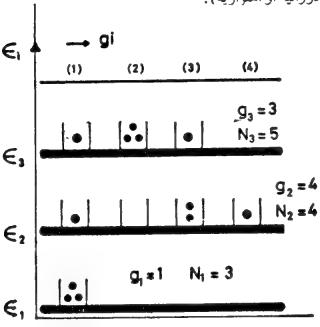
$$\sum_{i=0}^{N} N_i = N \qquad \dots (\Upsilon T - \Upsilon)$$

وان مجموع الطاقة (٤) يساوي مجموع طاقة الجسيات في النظام

$$i = M$$

$$\sum_{i = 0} Ni \epsilon_i = \epsilon$$
....( $\Upsilon V - \Upsilon$ )

وقد يكون بعض هذه الطاقة كامنة مصدرها مجال تشاقلي او كهربائي او مغناطيسي (قوى محافظة حركية (Conservative Forces)) والبعض الأخر طاقة حركية (انتقالية او دورانية او اهتزازية).



المخطط (٣ - ٤) ـ توضيح التحلل ( gi ) وعدد الأشغال (Ni في مستويات الطاقة ( єi ) .

فاذا كانت الجسيات طليقة فان طاقتها الكامنة تهمل وتسمى الطاقة الكلية للنظام حينئذٍ بالطاقة الداخلية (U)

$$\sum N_i G_i = U$$
 ... (  $\Upsilon \Lambda - \Upsilon$  )

وهي تبقى ثابتة المقدار اذا كان النظام معزولاً (Isolated) .

ان النقطة المركزية في الميكانيك الاحصائي ؛ هو ايجاد التوزيع الأكثر احتمالاً (The most probable distribution) للنظام المعزول . ويتم ذلك في حالة الاتزان الاحصائي (الثرموداينميكي) - كما ذكرنا سابقاً - ومتى ما تم اشتقاق قانون التوزيع فاننا نتمكن أن نشتق منه الخواص المنظورة للنظام تحت الشروط التي تمليها المعادلات الثلاث الأخيرة .

### امثلة محلولة

١ ـ صندوق مكعب الشكل طول ضلعه ١٠ سم يحتوي على غاز الهيليوم
 بدرجة ٣٠٠ ك ، فها مقدار العدد الكمي السيني لهذا النظام ؟
 الحل :

$$E_X = \frac{1}{2} kT$$
  
=  $\frac{1}{2} \times I.38 \times 10^{-16} \times 300 = 2.1 \times Io^{-14} ERG$ 

وهي الطاقة الحركية السينية ولكن من المعادلة (٢٦ – ٣) وهي الطاقة الحركية السينية ولكن من المعادلة (م. 
$$n_1 = \frac{a}{h} - \sqrt{8mE_X}$$

$$= \frac{10}{6.6 \times i0^{-27}} \sqrt{8 \times 2.1 \times 10^{-14}.6.6 \times 10^{-24}} \approx 10^{9}$$

- حيث  $\mathbf{m} = \mathbf{7}, \mathbf{7} \times \mathbf{1}$ غم وهي كتلة ذرة الهيليوم

لذلك فان مستويات الطاقة متقاربة جداً بحيث انه لو تغير  $n_1$  بمقدار الوحدة  $d\epsilon_X$  فان  $d\epsilon_X$  كون صغيراً جداً، وهذا يبرر اعتبار التغير في دالة الطاقة يكون بصورة متصلة (بالرغم من كونها مكممة) و يكننا استبدال  $\Sigma$  باشارة التكامل  $\Sigma$  .

۲ عاز من الهيليوم حجمه ۱ سم بدرجة ۳۰۰ ك وضغط جوي واحد ، طاقته تقارب ۱۰–۱۲ ارغ ، فها مجموع الحالات الكمية ( $\mathbf a$ )  $\mathbf a$  التي تتراوح طاقتها بين الصفر و( $\mathbf a$ ) .

الحل:

$$N(\epsilon) = \frac{4\pi V}{3h^3}$$
 : يكون (۳۱ – ۳) يكون (۳۱ – ۳) من المعادلة (۳۱ – ۳)

ولكن من الثوابت في المسألة (١) للهيليوم والتعويض بالمعادلة نحصل (على فرض ان الضغط الجوي  $N(\epsilon) \times 7 \times 10^{20}$ 

$$\therefore$$
 N ≈ 2.4 × 10<sup>19</sup> (جزيئة)

لذلك فان حالات الطاقة اكبر بكثير من عدد الجزيئات التي تشغلها الجزيئات .

الحل:

N! = N(N-1)(N-2)...

$$(N+1)! = (N+1)(N)(N-1)_4N-2)...$$

.. 
$$N! = (N+1)! / N+1$$

وبالتعويض عن N=0 يكون N=1 . وهناك تعريف رياضي اعم وأدق للمضروب N=1 تعرفة الدالة :

$$N! = \int_{1}^{\infty} x^{N} e^{-x} dx$$
 فاذا عوضنا  $N = 0$  فان التكامل يؤ دي الى الوحدة (راجع الملحق).

٤ - اشتق توزيع بواسون (Poisson Distribution) باستخدام توزيع ذي
 الحدين :

الحل:

$$P(n) = \frac{N!}{n! (N-n)!} P^{n} (1-p)^{N-n}$$

$$p+q=1$$

: فعندما p < < 1 فعندما p < < 1

$$\frac{N!}{(N-n)!} = N(N-1)(N-2)....(N-n+1)$$

$$\frac{N!}{(N-n)!} \approx Nn$$
 نحصل  $n << N$  ناده

فلو وضعنا  $y = (1 - p)^{N-n}$  واخذ لوغاريتم الطرفين نحصل

$$lny = (N - n) ln (1 - p) \approx - PN$$

حىث

 $y \approx (1-p)^{N-n} \approx e^{-Np}$ 

وتصبح دالة ذي الحدين بالصيغة

$$P(n) = \frac{N^n}{n!} p^n e^{-Np}$$

وتسمى هذه النتيجة بدالة توزيع بواسون

# تمارين الفصل الثالث

- (١) عرف ما يلي : الجسيمة المتميزة ، الجسيمة غير المتميزة ، خلية فضاء الطور ، الحالة المجهرية ، الحالة المنظورة ، التشت ، التحلل ، الاحتالية الثرموداينميكية .
- (٢) كرتان مختلفتان وكرتان مناثلتان ، أريد صفها بجميع الاحتالات الممكنة ، فاحسب عدد هذه الاحتالات (عدد الحالات المجهرية لهذه الحالة المنظورة والمساة بالاحتالية الثرموداينميكية) .

$$\frac{N!}{N_1!N_2!N_3!}$$
 : الجواب :  $\frac{N!}{N_1!N_2!N_3!}$ 

$$\frac{7!}{0! 5!}$$
،  $\sum_{i=0}^{5} i^2(i+1)$  قيمة : (٣)

- (٤) ما هي مصادر الطاقة الداخلية لغاز جزيئاته ثنائية الذرة ؟
- (٥) احسب قيمة (n) لذرة الاوكسجين المحصورة في صندوق مكعب

الشكل طول ضلعه ١ سم وان طاقته تساوي اوطىء طاقة لذرة الهيليوم محصورة في صندوق مكعب طول حرفه m 7 imes 1 - 10 .

(٦) ضع جدولاً لقيم  $n_1, n_2, n_3$  لاوطىء مستويات الطاقة الاثني عشر لجسيمة طليقة في وعاء حجمه (٧) واحسب التحلل (gi) لكل مستوى وبين فيا اذا كانت مستويات الطاقة متساوية البعد عن بعضها البعض.

(۷) استخدم زهر النرد (الـزار) ۲۸ مرة فحصلنا على عدد المرات التي  $N_1=5, N_2=5, N_3=5, N_4=6$  : ظهرت فيها الأوجه التالية :  $N_5=3, N_6=4$ 

فبرهن ان المتوسط يساوي ٣,٣٢ (استخدم المعادلة ٣ ـ ٨)

(۸) إذا قذفت اربع عُملات متاثلة مراراً فإن أحد الوجهين قد يظهر (n) من المرات حيث  $n = -\infty$  من المرات حيث  $n = -\infty$  معدل عدد ظهور احد الوجهين الى الاعلى .

 $\frac{1}{17}$ ,  $\frac{\xi}{17}$ ,  $\frac{7}{17}$ ,  $\frac{\xi}{17}$ ,  $\frac{1}{17}$ , = P(n):

Y = l

.  $(p+q)^N$  برهن ان مفكوك ذي الحدين

يعبر عنه بالعلاقة

$$\sum_{o}^{N} p(n) = (p+q)^{N} = \sum_{o}^{N} \frac{N!}{n! (N-n)!} p^{n} q^{N-n}$$

حيث n يمثل عدد الجسيات باحتالية p ، (N) مجموع جسيات النظام .

١٠ - احسب التشتت لئة عُملة متاثلة . الجواب : ٢٥

الأول على 3 المستوى الله مستويات للطاقة  $\epsilon_1$  ،  $\epsilon_2$  ،  $\epsilon_3$  ،  $\epsilon_3$  يحتوي المستوى الأول على 3 المسيات متاثلة وشلاث حالات طاقة والمستوى الثاني يحتوي على ١٠ جسيات متاثلة و ٤ حالات طاقة والمستوى الثالث على ٥ جسيات متاثلة و ٦ حالات طاقة . مثل ذلك بمخطط . واذكر قيمة الا ، الا لكل مستوى ومجموع طاقة النظام .

$$\frac{d \ln P}{dn}$$
 = صفر (تنویه للحل : خذ لوغاریت الطرفین وعین = صفر

واستخدم العلاقة 
$$= \frac{d \ln x}{dx} = \sin x$$
 عندما تكون x اكبر من الوحدة) .

# الفصل الرابع الاحصاء الميكانيكي التقليدي.

# (٤ - ١) الاحتمالية الثرموداينميكية:

يسمى هذا النوع من الاحصاء احياناً الثرمودا ينميكس الاحصائي او احصاء ماكسويل \_ بولتزمان(. M - B)

(The Maxwell - Boltzmann statistics)

وهو يعالج بنجاح كبير العديد من المسائل الثرمودا ينميكية وبشمولية اكثر من النظرية الحركية ويخضع لهذا النوع من الاحصاء الجزيئات الغازية ، تحت الضغوط الواطئة ، وكذلك الجسيات النووية (مثل الالكترونات والنيوترونات) في درجات الحرارة العالية ، وهي تخضع للمعادلتين ( $\mathbf{w} - \mathbf{w} - \mathbf{w}$ ) . فلو اخذنا الا من المستويات في حالة التكميم (gi) والتي تمثل عدد خلايا فضاء الطور في المستوى(i) والتي طاقتها( $\mathbf{e}$ i) ، فأن لكل جسيمة (gi) من الخيارات (Choices) لاشغال (gi) من حالات التكميم وهذا يصح أيضاً على الجسيات الاخرى لذلك فان مجموع الطرق التي يمكن الى (Ni) من الجسيات المتميزة ان تشغلها من بين ig من الخيارات (الحالات المكممة) ستكون ( $\mathbf{e}$ i) وان هذه الكمية كبيرة في الجسيات المتميزة . اما اذا كانت الجسيات غير متميزة (جزيئات الغاز مثلا) ، فيجب حينئذ قسمة هذه الكمية بالمضروب ! Ni وذلك تجنباً لعد الحالات المتكررة .

لذلك فان عدد الطرق Wi التي يمكن ان تتوزع بها Ni من الجسيات الغير متميزة (indistinguishable) من بين gi من الحالات المكممة (حالات الطاقة الواحدة) في المستوى (او المجموعة) (i) هي :

 $W_i = g_i^{N_i} / N_i$ !

$$W_1 = \frac{81}{32}$$
,  $W_2 = \frac{40}{3}$ ,  $W_1 = 1$  نجد (\$ - \mathbf{Y}) نجد

فلو وزعنا الجسيات الى (M) مجموعة ( M مستوى طاقة) . فان عدد الطرق

المكن ان نسلكها للحصول على نفس الحالة المنظورة (Macrostate) يساوي حاصل ضرب حدود من امثال  $\frac{gi \, Ni}{Ni!}$  لكل مستوى طاقة او مجموعة

$$\Omega = \frac{g_1^{N_1}}{N_1!} \times \frac{g_2^{N_2}}{N_2!} \dots \frac{g_i^{Nm}}{N_M!}$$

$$\Omega = \frac{i = M}{\prod_{i=1}^{M} \frac{g_i}{N_i!}} \dots \dots (1 - \xi)$$

حيث ∏ يمثل ضرب الحدود .

 $\Omega = N \ ! \ \prod \frac{gi^{Ni}}{Ni \ !}$  (Distinguishable) فإن نائد (Distinguishable) اما للجسيات المتميزة

فاذا كانت الجسيات متميزة وكانت حالة الطاقة غير متحللة gi = I وتصبح gi = I فان gi = I وتصبح والحالة في الذرات في البلورة ، فان gi = I وتصبح ويراد عنه الحالة في الذرات في البلورة ، فان gi = I وتصبح ويراد عنه الحالة في الذرات في البلورة ، فان gi = I وتصبح ويراد عنه الحالة في الذرات في البلورة ، فان gi = I وتصبح ويراد عنه الحالة في الذرات في البلورة ، فان gi = I وتصبح ويراد عنه الحالة في الذرات في البلورة ، فان gi = I وتصبح ويراد عنه المناطقة في الدرات في البلورة ، فان gi = I وتصبح ويراد عنه البلورة ، فان gi = I

$$\Omega = N! / \frac{i = M}{I} Ni!$$

وتسمى ( $\Omega$ ) بالاحتالية الثرموداينميكية Thermodynamic probablility الخالة المنظورة . وهي تعرف احياناً بانها تمثل عدد الحالات المجهرية التي تعود لتلك الحالة المنظورة ولعل ابسط مثال على ذلك هو وضع (N) جسيمة (كره مثلا) متميزة (مختلفة) في صف ، فهناك ! N من الكيفيات . اما لو كان فيها N كرة متشابهة من نوع آخر ، N متشابهة من نوع ثالث . . الخ فإن عدد الكيفيات في التوزيع (أو الاحتالية الثرموداينميكية) تتقلص فتصبح

$$\frac{N_{i}!}{\prod N_{i}!} = \frac{N!}{N_{i}! N_{2}! N_{3}!}$$

فكلها كانت  $(\Omega)$  كبيرة تكون احتالية تواجد النظام المتكون من (N) جسيمة في تلك الحالة ، اكبر . ولقد ذكرنا بانه في النظام المعنزول تكون (N) ، (N) ، ولو فرضنا ان حجم النظام V ثابت ، فان حالة الاتزان تتم عندما تكون

 $d Ln \ \Omega=0$  , d Ni=0 , d u=0 فان  $d Ln \ \Omega=0$  اقصاها , وبعبارة اخرى فان  $\Delta Ln \ \Omega=0$  .  $\Delta Ln \ \Omega=0$  المتين .

ولغرض اشتقاق توزيع ماكسويل ـ بولتزمان ، نستخدم المعادلة (٤ ـ ١) ونجد قيمتها العظمى ، بأخذ لوغاريتم الطرفين . وتقريبها باستخدام معادلة ستيرلنج (Stirling Formula) التالية :

$$Ln \Omega = (N_1 Lng_1 - NI LnNI + NI) + (N_2 Lng_2 - N_2 LnN_2 + N_2) + \dots$$

= 
$$\sum$$
 Ni Lngi -  $\sum$  NiLnNi +  $\sum$  Ni

$$\operatorname{Ln}\Omega = \sum \operatorname{Ni}\operatorname{Ln}\left(\operatorname{gi}/\operatorname{Ni}\right) + \operatorname{N} \qquad \qquad \ldots \quad (\circ - \xi)$$

$$\begin{array}{l} d\,Ln\,\Omega = \sum\,d\,(\,Ni\,Ln\,(\,gi\,\,/\,\,Ni) = \sum\,Ln\,(\,gi\,\,/\,\,Ni)\,dNi = 0 \\ \sum\,\varepsilon_i\,dNi = 0 \quad , \quad dN = \sum\,dN_i = 0 \end{array}$$

$$\therefore \sum (\operatorname{Ln} (\operatorname{gi} / \operatorname{Ni}) + \operatorname{Ln} \alpha - \epsilon i \beta) d\operatorname{Ni} = 0$$

حيث  $\ln \alpha$  ,  $\ln \alpha$  تسميان ثابتاً (لاكرانج) الافتراضين . وبما ان  $\ln \alpha$  لا يساوي صفراً ، لذلك فان  $\ln \alpha - \epsilon$  الما  $\ln \alpha - \epsilon$ 

اي ان

ولكن

$$Ni = \alpha ...gi e^{-\epsilon i\beta}$$
 .... ( $7-\xi$ )

وتسمى النتيجة الاخيرة دالة ماكسويل ـ بولتزمان .

$$N = \sum N_i = \sum \alpha g_i - e - \epsilon i \cdot \beta$$

$$\therefore \alpha$$
 =  $\frac{N}{\sum g_i e - \epsilon_i \beta} = \frac{N}{Z}$  : خيث  $Z = \sum g_i e - \epsilon_i \beta$  (۷ - ٤)

وتسمى Z بدالة الحجز (Partition Function) بالانكليزية أو جمع الحالات (Zustand Summe)

وتعتمد (Z) على خواص النظام وعلى تركيبه المجهري . وان تعينها لنظام ما ، هو في غاية الاهمية . وعليه فان المعادلة (1-7) تصبح (1-6) . . . 0

$$Ni = \frac{N}{7} g_i e^{-\epsilon i\beta} \qquad \dots \qquad (\Lambda - \xi)$$

#### (٤ ـ ٢) الانتروبي والاحتالية الثرموداينميكية:

لقد وجد الطالب في دراسته للثرموداينمكس ، بان النظام المعزول يزداد فيه الانتروبي (S) عندما يمر النظام بعمليات غير عكسية ، وتصل قيمته الى ذروتها في حالة الاتزان . وكها ذكرنا سابقاً ، فان ( $\Omega$ ) هي ايضاً تبلغ ذروتها في حالة الاتزان لذلك فلا بد من علاقة تربط ( $\Omega$ ) مع (S) .

$$\cdot \cdot S = f(\Omega)$$

فلو تواجد نظامان (A) ، (B) في حالة تماس حراري ، فان الانتروبي للجموعها (S) يساوي (SA + SB) لأنه كمية حجمية (Extensive) اما الاحتالية الثرموداينميكية ( $\Omega$ ) للنظامين فتساوي  $\Omega$  A .  $\Omega$ B .

$$\Omega = \Omega_A \cdot \Omega_B$$
 
$$S = SA + SB \qquad : ولکن$$
 
$$\therefore \quad f(\Omega A \Omega B) = f(\Omega A) + f(\Omega B) \qquad :$$

ولكن الدالة الوحيدة التي تحقق هذه العلاقة تكون لوغاريتمية ولكن الدالة الموحيدة التي تحقق هذه العلاقة تكون لوغاريتمية  $S = k' \operatorname{Ln} \Omega$  مقفل (dN = 0) يُعرِّف درجة الحرارة (T) بالصيغة du = TdS - pdV

$$\frac{1}{T} = (\frac{\partial S}{\partial u})_{v} \qquad \dots (4-\xi)$$

وبما ان U,S يكن حسابها بطرق الميكانيك الاحصائي (كما سنرى) ، لذلك فان المعادلة (£ - 4) تعطينا درجة الحرارة الكلفنية . وهي بذلك تبين كيف ان النظام المنظور لدرجة الحرارة يدخل في الميكانيك الاحصائي .

$$dLn \Omega = \sum Ln - \frac{gi}{Ni}$$
  $dNi$   $dNi$   $equation 2$   $equation 3$   $equation 4$   $eq$ 

#### $\therefore$ d Ln $\Omega = \sum \beta \epsilon i dNi - Ln \alpha \sum dNi$

$$d \ln \Omega = \beta d u$$
 : فنجد النتيجة  $\beta = \frac{\partial \operatorname{Ln} \Omega}{\partial u}$  :  $(1 \cdot - \xi)$  :  $S = k'$  :  $\operatorname{Ln} \Omega$  :  $(1 \cdot - \xi)$  :  $\beta = \frac{1}{k'} (\frac{\partial S}{\partial u}) v = \frac{1}{k'T}$ 

ولغرض اكتشاف هوية الثابت k' نفترض N) جزيئة من غاز مثالي تشغل حيراً صغيراً V ، وان نفس العدد من هذه الجزيئات جُعل يشغل حجهاً اكبر V ) ، لذلك فان الاحتالية النسبية لايجاد جزيئة واحدة في الحجم الصغير بدلا من الحجم الكبير تساوي  $\frac{V}{V_0}$  ، وان هذه الاحتالية لجزيئتين تساوي  $\frac{V}{V_0}$  ) والى V

جزيئة تساوي 
$$N \left( \frac{V}{V_0} \right)$$
 اي ان

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} = (\frac{V}{V_0})^N$$

.'. 
$$Ln\Omega - Ln \Omega o = N (LnV - Ln Vo)$$

$$S - So = k'N (LnV - Ln Vo)$$

$$\therefore \left( \frac{\partial S}{\partial v} \right) T = k' \frac{N}{v}$$

وةلكن (من معادلات ماكسويل في الثرموداينميكس)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)T = p/T$$

$$\frac{p}{T} = k' \frac{N}{V}$$

$$\frac{p}{1} = k \frac{N}{V}$$
 : ولكن معادلة الغاز المثالي :

... k' = k = BOLTZMANN'S CONSTANT

أى ان 'k هو ثابت بولتزمان (k) وعليه يكون :

$$\beta = \frac{1}{kT} \qquad \dots \qquad (11 - \xi)$$

$$Ni = \frac{N}{Z}$$
 gi exp $(-\epsilon_i / kt)$  .... (۱۲-  $\xi$ ) : كذلك

$$Z = \sum gi \quad Exp - (\epsilon i / kT)$$
 .... (\\\ \( \\ \\ \\ \\ \)

وتسمى الكمية  $\operatorname{Exp-}\epsilon i/k$  معامل بولتزمان ، وهي دالة كثيرة التكرار في مختلف الحقول العلمية . وهي دالة سريعة التناقض مع انخفاض (T) وزيادة ( $\epsilon i$ ) ونظراً لاحتواء الكمية (Z) اهم المعلومات الاحصائية عن جسيات النظام ، لذلك فمن المفيد ان نعبّر عن مختلف الاحداثيات الثرموداينميكية بدلالة (Z) .

فلو فاضلنا (٤ - ١٤) . بدلالة (T) تحت حجم ثابت نحصل

$$(\frac{\partial Z}{\partial T})_{v} = \sum gi \frac{\epsilon i}{kT^{2}} Exp - (\epsilon i / kT)$$

$$-\frac{1}{kT^{2}} \sum gi \epsilon i exp - \epsilon i / kT$$

$$= \frac{Z}{NkT^{2}} \sum \epsilon i Ni = \frac{ZU}{NkT^{2}}$$

$$U = NkT^{2} (\frac{\partial \ln Z}{\partial T})_{v}$$
 (10 - \mathbf{Y})

$$\frac{Ni}{gi} = \frac{N}{Z} \cdot \exp{-(\frac{\epsilon i}{kT})},$$

$$kLn\Omega = S$$

$$Ln\Omega = \sum Ni \ Ln \frac{gi}{Ni} + N$$
: نان

$$\therefore S = k \sum Niln (gi / Ni) + kN$$

$$= k Ln \frac{Z}{N} \sum dNi + \frac{I}{T} \sum \epsilon iNi + kN$$

$$\therefore S = kN Ln \frac{Z}{N} + \frac{U}{T} + kN \qquad \dots \qquad (17-\xi)$$

ومن القانون الأول للثرموداينميكس لنظام مفتوح يكون :

 $Tds = du + p dv - \mu dN$ 

(Chemical Potential) حيث  $\mu$  يسمى الجهد الكيميائي الجزئي  $\mu$ 

.', 
$$P = -\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_{T,N} + T\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_{T,N}$$

$$=-\left[\frac{\partial}{\partial v} \quad (u-Ts)\right]_{T,N}$$

وتسمى الكمية (u - Ts) دالة هلمهولتز (F) او دالة الطاقة الحرة:

$$F = u - Ts$$

$$\therefore dF = du - Tds - sdT$$

ومن القانون الأول للثرموداينميكس اعلاه :

$$dF = - pdv - sdT + \mu dN$$

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)T.N$$
 : description :

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)V,N \qquad \qquad \dots \qquad (V - \xi)$$

$$\mu = -(\frac{\partial F}{\partial N})_{T,v}$$

$$F = U + T \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N}$$

$$U = F - T \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_{v,N}$$

$$...U = -T^2 \left( \frac{\partial}{\partial T} \right) \left( \frac{F}{T} \right)_{V,N}$$

$$U = NkT^{2} \left( \frac{\partial LnZ}{\partial T} \right)_{T,N}$$
: ولكن

$$\therefore F = -NkT$$
,  $Ln Z \qquad \dots (\Lambda - \xi)$ 

و بالتعویض عن قیمهٔ U,S بدلالهٔ Z نحصل کذلك علی : 
$$P = NkT \left( \frac{\partial LnZ}{\partial v} \right)_{T,N} \qquad \qquad \dots \qquad (19-\$)$$

$$\mu = -\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} = -kT \operatorname{Ln} Z \qquad \dots \qquad Y \cdot - \xi)$$

$$\therefore \operatorname{Ln} Z = -\mu / kT_{\zeta^{1}} / z = \epsilon \operatorname{xp} - \mu / kT$$

$$\frac{Ni}{gi} = N \exp\left(\frac{\mu - \epsilon i}{kT}\right) \qquad (Y1 - \xi)$$

حيث تمثل النسبة  $\frac{Ni}{N}$  معدل العدد الكسري للجسيات في المستوى i كذلك  $\frac{Ni/N}{gi}$  هو الكسر النسبي للجسيات لحالة الطاقة الواحدة في أي مستوى .

# (٤ - ٣) التفسير الاحصائي للشغل والحرارة:

لقد ذكرنا في هذا الفصل بأنه في حالة الاتزان لعدد كبير من الجسيات (N) الغير متميزة والشبه مستقلة في حيز صغير مكعب الشكل حجمه ٧ وطول حرفه ه فان توزيع الطاقة للجسيات يمثل بالمعادلة :

$$\epsilon i = ni^2 . \pi^2 \hbar^2 / 2ma^2$$

$$= (\frac{ni^2 . \pi^2 \hbar^2}{2m}) . V^{-2/3}$$

: نحصل نبتنا ni² وأخذنا لوغاريتم الطرفين لمستوى الطاقة  $\epsilon$ i نحصل الما $\epsilon$ i الما $\epsilon$ i الما $\epsilon$ i = Ln ( $\pi^2\hbar^2/2$ m) + Lni² ni² - ½ Lnv

$$\frac{d\epsilon i}{\epsilon i} = -\frac{2}{3} \frac{dv}{v}$$

$$\therefore d\epsilon i = -\frac{2\epsilon i}{3} \cdot \frac{dv}{v}$$

$$\sum$$
 Ni $\epsilon$ i = U

$$\therefore \sum Nid\epsilon i = -\frac{2U}{3} \frac{dv}{v}$$

ولكن للغاز المثالي : 
$$P = \frac{2}{3} - \frac{U}{V}$$
 : ولكن للغاز المثالي :

$$\sum_{i} \text{Nid} \epsilon_i = - \text{pdv} = - \text{dW}$$
 (YY -  $\xi$ )

أي أن تغير الحجم المسبّب للشغل يؤ دي الى تغير قيمة طاقة مستويات الطاقة 
$$U=\sum Ni\epsilon i$$
 : وبما ان :  $U=\sum Ni\epsilon i$  : وبما ان :  $U=\sum Ni\epsilon i$  :  $U=\sum Ni$ 

لذلك فان التغيرات الحرارية ، تؤدي الى تغيرًات في توزيع الجسيات بين مستويات الطاقة بدون تغير في قيمة طاقة تلك المستويات .

### (٤ - ٤) - بعض تطبقات احصاء (ماكسويل - بولتزمان) : (١) اشتقاق خواص الغاز الآحادي الذرة (الغاز المثالي) :

عتلك الغاز المثالي طاقة حركية انتقالية فقط ، ولقد بيّنا في المعادلة ( $\mathbf{7}$  -  $\mathbf{7}$ ) بأن الغاز الذي يشغل حيزاً كبيراً تتقارب فيه مستويات الطاقة بحيث يمكن اعتبار دالة الطاقة (gi) متصلة ، ويمكننا ان نعوّض عن التحلل (gi) بالكمية  $\mathbf{g}(\epsilon)$  وهي قتل عدد الجزيئات التي طاقتها تنحصر بين ( $\mathbf{e}$ )  $\mathbf{e}$  +  $\mathbf{e}$  ومن معادلة ( $\mathbf{e}$ )  $\mathbf{e}$  +  $\mathbf{e}$  ومن معادلة ( $\mathbf{e}$ ) نحصل :

$$g(\epsilon)d\epsilon = \frac{4\pi V}{h^3} (2m^3)^{1/2} \epsilon^{1/2} d\epsilon$$

$$Z = \sum gi \exp - (\epsilon i / kT) = \int_0^\infty g(\epsilon) \exp - \frac{\epsilon i}{kT} d\epsilon$$

$$= \frac{4\pi V}{h^3} \frac{(2m^3)^{1/2}}{\int_0^\infty \epsilon i /2} \exp - \frac{\epsilon i}{kT} d\epsilon$$

$$Z = \frac{4\pi V}{h^3} \frac{(2m^3)^{1/2}}{\int_0^\infty \epsilon i /2} \frac{1}{[\pi(kT)^3]^{1/2}} d\epsilon$$

$$Z = \frac{V}{h^3} (2\pi m kT)^{3/2}$$
 (Y\xi - \xi)

. . LnZ = LnV + 
$$\frac{3}{2}$$
 LnT +  $\frac{2\pi m k}{h^2}$ 

$$(\frac{\partial \operatorname{Ln} Z}{\partial T})_{V} = \frac{3}{2} \frac{I}{T}, (\frac{\partial \operatorname{Ln} Z}{\partial V})_{T} = \frac{1}{V}$$

... 
$$U = NkT^{2}(^{3}/_{2}) \frac{1}{T} = \frac{3}{2}N kT$$
 .... (Yo - \xi)

$$p = \frac{2}{\sqrt{\frac{U}{V}}}$$

$$p = \frac{NkT}{V} \qquad (Y7 - \xi)$$

كذلك نحصل مناشرة على:

$$S = CvLnT + RLnV + RLn \frac{(2\pi mk)^3 / 2}{N_0 h^3} + \frac{5R}{2} \cdots (YV - \xi)$$

للمول الواحد ، أو:

ولقد سبق واشتققنا بعض العلاقيات الأخيرة بواسطية النظيرية الحركية للغازات ، ولكن تلك النظرية عجزت عن اعطاء القيمة المطلقة للانتروبي (S،) بدلالة الكمية القابلة للقياس . أما الميكانيك الاحصائي فلقد اشتق هذه الكميات بطريقة مستقلة وبعمق أكبر.

## (٢) مبدأ تسوى اقتسام الطاقة :

Equipartition of energy principle

لقد تطرقنا الى هذا المبدأ في الفصل الأول وبصورة اولية وكان فيها الكثير من

$$Z = \sum Exp - \epsilon / kT = \sum Exp - \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \dots)}{kT}$$

$$= Z_1 . Z_2 . Z_3 . \dots$$

$$\beta = \frac{I}{KT}$$
 ،  $\frac{U}{N} = \overline{\epsilon}$  : ولكن متوسط الطاقة للجسيمة

$$\therefore \ \overline{\epsilon} = kT^2 \ (\frac{\partial \operatorname{Ln} Z}{\partial T})_{V} = -\frac{\partial \operatorname{Ln} Z}{\partial \beta} \qquad \qquad ( \Upsilon \P - \xi )$$

فلو فرضنا ان كل حد من حدود الطاقة ( $\epsilon$ ) يعتمد على مربع المتغير (X) ، وهي دالة متصلة الى (X) بحيث يمكن تمثيلها بالصيغة (X) فأن  $\epsilon_f=a_1~X_1^2+a_2~X_2^2+~\dots~a_f~X_f^2$ 

... 
$$Z = \int_{0}^{\infty} Exp - a_{1}X_{1}^{2}\beta \cdot dX_{1} \int_{0}^{\infty} Exp - a_{2}X_{2}^{2}\beta \cdot dX_{2} ... \int_{0}^{\infty} Exp - a_{1}X_{f}^{2}\beta dX_{f} \leftarrow a_{1}X_{f}^{2}\beta dX_{f}$$
  
 $= \beta \cdot \frac{-F}{2} K_{1}K_{2} \cdots K_{f}$ 

$$\frac{1}{kT} = \beta$$
 : حيث  $K_f$  ثابت لا يحتوي على  $\beta$  حيث :

$$... = -\frac{\partial \operatorname{LnZ}}{\partial \beta} = \frac{f}{2\beta} = \frac{f kT}{2} \qquad ..... (\Upsilon' - \xi)$$

ان هذه النتيجة الرائعة لا يمكن الوصول اليها لو كانت الحدود خالية من مربع الاحداثي المتغير ، او كانت الدالة غير متصلة (الطاقة المكممة) لذلك فان مبدأ تساوى اقتسام الطاقة ينص على ما يلى :

(النظام الذي يحتوي على عدد كبير من الجسيات الغير متميزة والشبه المستقلة بحيث ان طاقتها يعبّر عنها بمجموع من الحدود (f) المربعة وكانت في حالة اتزان فان متوسط الطاقة للجسيمة الواحدة تساوي (½ fkT).

لذلك فان هذه الشروط لا تنطبق على الطاقة الكامنة التشاقلية او الكهرومغناطيسية لأن الطاقة دالة خطية الى المتغير (X).وكذلك للطاقة الدورانية والاهتزازية وطاقة التهيج الالكتروني للجزيئات ؟ لأن طاقتها مكممة (الدالة غير متصلة) اضافة الى ان طاقة هذه الحالات الأخيرة لا تكون دالة بسيطة لدرجة الحرارة (T).

## (٣) اشتقاق قانون ماكسويل لتوزيع السرعة:

$$N_i = \frac{N}{Z}$$
 gi Exp  $-\epsilon i / kT$  (20 -  $\Upsilon$ ) الى المعادلة (20 -  $\Upsilon$ )

$$dN(\epsilon) = gi = g(\epsilon) d\epsilon = \frac{4\pi V}{h^3}$$
 (2m³) $\frac{1}{2} \frac{\epsilon^1}{2} d\epsilon$  : وكذلك المعادلة

واستعضنا عن Ni بدلالة (ع) dN فان :

$$dN(\epsilon) = \frac{N}{Z} \cdot \frac{4\pi V}{h^3} \cdot \frac{(2m^3)^1 /_2}{h^3} \cdot \frac{\epsilon^1 /_2}{h^3} \cdot \frac{Exp - \epsilon i / kT d \epsilon}{h^3}$$

وبما ان الغاز مثالي بالفرض ، فيكون Z (٤ ـ ٢٤) .

$$Z = \frac{V}{h^3} (2\pi mk T)^{3/2}$$

$$\frac{dN(\epsilon)}{d\epsilon} = \frac{2\pi N}{(\pi kT)^3/2} \epsilon^1/2 \exp{-\epsilon i / kT} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (\Upsilon - \xi)$$

وهي تمثل معادلة ماكسويل لتوزيع طاقة الجزيئات . أما اذا اردنا تحويلها بدلالة الانطلاق (Speed) فنعوض عن  $dN(\epsilon)/d\epsilon$  بلقدار المكافىء

$$\frac{1}{mc}$$
  $\frac{dn(c)}{dc}$ 

$$\epsilon = \frac{1}{2} \text{mc}^2$$
 :  $0$ 

$$\frac{dN(c)}{dc} = \frac{dN(c)}{d\epsilon} \cdot \frac{d\epsilon}{dc} , \quad mc = \frac{d\epsilon}{dC}$$

$$\frac{dN(c)}{dc} = 4\pi N \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} c^{2} Exp - \frac{m c^{2}}{2kT} \cdot (YY - \xi)$$

وهي تمثل معادلة ماكسويل لتوزيع السرع ، ولقـد اشتـق ماكسـويل هذه العلاقة عام ١٨٥٧ ، بطريقة مغايرة وجدها القارىء في الفصل الأول .

#### (Barometric Equation) المعادلة المروازية

وهي معادلة تربط العلاقة بين الضغط الجوي والارتفاع ودرجة الحرارة للهواء الجوي. ولقد أمكن اشتقاقها بسهولة في الثرموداينميكس اما اشتقاقها بطريقة الميكانيك الأحصائي على جزيئات الهواء الجوي، ففيه شي من الصعوبة، وسوف نشتقها باسهل الطرق.

ان جزيئة الغاز على ارتفاع (Z) فوق سطح الأرض تتكون طاقتها من طاقة كامنة (mg~Z) ثامنة (mg~Z) ثامنة (mg~Z) ثامنة (mg~Z) فاذ اخذنا مقطعاً افقياً من الهواء مساحته (mg~Z) حيث mg~Z فان :

ولو عوضنا عن gi بالمقدار Ni و dgi بالمقدار و dgi عدد خلايا فضاء و dgi بين مستوى الطاقة عن ( $d \in + \epsilon$ ) فان :  $dNi = \frac{N}{Z} \, dgi \cdot Exp - \epsilon i / kT$   $= \frac{Nh^3mg}{m^3AkT} (m / 2\pi kT) \frac{3/2}{h^3} \frac{dxdydzdpx \cdot dpy \, dp}{h^3} \exp - \epsilon i / kT$ : فان :  $exp - \epsilon i / k \, T \, dx \, dy \, dz \, du \, dv \, dw$ :  $exp - \epsilon i / k \, T \, dx \, dy \, dz \, du \, dv \, dw$ :  $exp - \epsilon i / k \, T \, dx \, dy \, dz \, du \, dv \, dw$ :  $exp - \epsilon i / k \, T \, dx \, dy \, dz \, du \, dv \, dw$ 

$$(dNZ) = \frac{Nmg}{AkT} \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mgz}{kT}} \iint_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \frac{m}{2kT} (u^{2} + v^{2} + w^{2}) dx dy dz$$

$$(dN\ Z)=(rac{Nmg}{AkT})\ e^{-mg}\ Z/kT$$
 .  $dx\ dy\ dz$  
$$\frac{dN(Z)}{dxdydz}=n \qquad \qquad : فريما ان الكثافة الجزيئية :$$

$$...n = \frac{Nmg}{AkT} e^{-mgz} / kT$$

$$n = n_0 e^{-mgz} / kT \qquad ..... (*T*-$)$$

(Z = o) عند سطح الأرض no = nعند ميث

ولقد استخدم العالم الفرنسي (جين بيرين ١٩٠٩) هذه المعادلة لاستخراج عدد أفوكادر و للمحاليل الغروية .

و بما ان n = p / kT لذلك فان المعادلة n = p / kT تصبح

$$p = P_0 e^- mg Z / kT$$
 (Y\xi - \xi)

وهي المعادلة المروازية لجو تثبت فيه درجة الحرارة (جو آيز وثرمي) وهي تسمى الحاناً معادلة الأجواء (Equation of atmospheres)

### (٥) اشتقاق معادلة كلاو زيوس ـ كلابيرون احصائياً:

لقد اشتقت معادلة كلاوزيوس ـ كلابيرون في الثرموداينميكس باستخدام نوع من دورة كارنو ، وتعتبر هذه المعادلة من أكثر المعادلات الثرموداينميكية فائدة ولا سيا في عمليات التكثيف والانجهاد والتسامي في الجو الأرضي . وهي تعطينا العلاقة بين ضغط بخار المادة ودرجة حرارة تحولها ، عندما ينصهر او يتبخر او يتسامى الجسم . ويعبر عنها بالعلاقة المألوفة :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{L}{T(V_2 - V_1)} \qquad \qquad \dots \quad (\mathfrak{Po-\xi})$$

حيث (L) هي الحرارة الكامنة للتحول  $V_2, V_1$  حجم وحدة الكتل من المادة عندما تتحول من الحالة الأولى  $(V_1)$  الى الحالة الثانية  $(V_2)$  فقد تكون لوحدة الكتل (غم او كغم) او (مول) ، p ضغط البخار المشبع بدرجة (T) ، ويقاس بوحدات نيوتن  $V_1$  ،

ففي حالة تبخر الماء مثلاً فان:

$$V_2 = 1671 \frac{Cm^3}{gm}$$
,  $V_1 = 1 Cm^3 / gm$ 

 $(V_1)$  وعليه يمكن اهمال  $(V_1)$  مقارنة بـ( $V_2$ ) :

$$\frac{dP_v}{dT} = \frac{L^v}{Tv_2} \qquad \qquad \cdots \qquad ( \Upsilon^{\tau} - \xi )$$

$$\rho = \frac{P}{rT} = \frac{I}{V_2} = \frac{V_2}{V_2}$$

حيث( $\rho$ ) کثافة البخار ، r (ثابت الغاز للکيلوغرام) ،  $v_z$  ( $\sigma$ ) على فرض ان بخار الماء يخضع لقانون الغازات ، فتصبح ( $\sigma$ ) .

$$\frac{dP_{V}}{dT} = \frac{L_{V}}{r} \cdot \frac{dT}{T^{2}} \cdot \dots \cdot (TV - \xi)$$

فاذا اعتبرنا Lv ثابتة مع (T) فيمكن تكامل المعادلة الأخيرة لايجاد العلاقة بين ضغط بخار الماء المشبع ودرجة حرارته (T). وسوف نستخدم احصاء ماكسويل بولتزمان بطريقة تقريبية لاشتقاق المعادلة اعلاه ، فلو أخذنا حجمين متساويين من وعاء مقفل فيه سائل متزن مع بخاره بدرجة (T) يحتوي البخار على (Nv) جزيئة والسائل على (Ni) جزيئة ، فاذا اعتبرنا البخار غاز مثالي طاقته المميزة Ev تقارب للا فان الطاقة الكامنة (El) لجزيئات السائل تزيد كثيراً على Ev وتكون سالبة بسبب قوى التجاذب الجزيئية . فلو اعتبرنا البخار والسائل نظامين منفصلين ولكن

$$\frac{Nv}{Nl} = \frac{e^- Ev/kT}{e^- El/kT} = e^- (Ev - El)/kT \approx e^- E/kT$$

$$\therefore Nv = Nt e^{-} E/kT$$

وبضرب الطرفين في 
$$\frac{kT}{V}$$
 نحصل :

$$Nv . \frac{kT}{V} = \frac{N_1 kT}{V} e^{-E/kT}$$

$$... P_{v} = \frac{N! kT}{V} e^{-E} / kT$$

$$P = \frac{NkT}{V}$$
 يأن  $P = \frac{NkT}{V}$ 

$$...\frac{dP_{v}}{dT} = \frac{P_{v}}{T} \qquad \frac{(I+E)}{kT} \approx \frac{P_{v}E}{kT^{2}}$$

لأن E اكبر بكثير من kT بالفرض\_.

وباستخدام معادلة الغاز المثالي ، نحصل على المعادلة (٣-٧٣)

$$...\frac{dp_{v}}{dT} = \frac{N_{v}E}{T.V} = \frac{Lv}{TV}$$

. ميث Nv , Lv = NvE عدد جزيئات وحدة الكتل

(The ten degrees rule) : قاعدة العشرة درجات : (٦)

من القواعد المعروفة لدى علماء الكيمياء والأحياء بالخبرة ، بان التفاعل الكيميائي يتضاعف تقريباً كلما ارتفعت درجة الحرارة ، بمقدار (١٠ س°) وان الزيادة الفعلية تعتمد على طبيعة المواد المتفاعلة وعلى درجة الحرارة . وان اساس

هذه القاعدة ينبع من اعتاد التفاعل على عامل (بولتزمان) (e E/kT) عامث (بولتزمان) (e E/kT) هذه الحالة تسمى طاقة التنشيط (Activation energy (E) المميزة للكثير من التفاعلات الكيميائية والتي تقارب الكترون فولط واحد تقريباً للمول الواحد . ففي التفاعل الكيميائية من المادة (A) مع  $n_B$  جزيئة من المادة (B) لتكوين المركب AB حيث .

تكون سرعة التفاعل (R) يعبر عنه بالمعادلة :

$$R = k_f n_A n_B_e - E_o / kt \qquad \dots \quad (\Upsilon \Lambda - \xi)$$

لا يتغير بالسرعة الحرارة ولكنه لا يتغير بالسرعة  $\frac{E_0}{kt}$  معامل (بولتزمان) مع درجة الحرارة . فمثلاً تبلغ قيمة قرابة قرابة التي يتغير بها معامل (بولتزمان) مع درجة الحرارة .

$$\frac{E_0}{k (T + \delta T)}$$
 نان ( $\delta T$ ) في درجة الحرارة بمقدار ( $\delta T$ ) فاذا ارتفعت درجة الحرارة بمقدار ( $\delta T$ )

تقارب( $\frac{\delta T}{T}$ ) أي ان اس القوة قد تغيرٌ بمقدار  $\frac{E_0}{T}$  أي ان اس القوة قد تغيرٌ بمقدار  $\frac{\delta T}{T}$  أن انه لو تغيرت درجة الحرارة بمقدار 1% فان قيمة التغير يساوي T0، لذلك فان النسبة بين التفاعل عند T0 T1 يعبر عنها بالعلاقة :

$$\frac{R(T + \delta T)}{R(T)} \approx e \ 30\delta T/T \qquad \dots \qquad (\Upsilon^q - \xi)$$

فلو تضاعفت سرعة التفاعل في درجة ٤٠٠ ك فان ٤٦ تقارب (٩) س° . ومن هنا جاءت قاعدة العشر درجات .

ان اعتاد التفاعلات الكيميائية (ولا سيا في الكائنات الحية) على درجة الحرارة بهذه الحساسية ، جعل الكثير من الكائنات الحية تنقرض ولا سيا ذوات الدم البارد ، لأنها لم تتمكن من التكيف لارتفاع او انخفاض درجات الحرارة في الجو الارض عبر العصور الجيولوجية السحيقة ، وخاصة في الحقب الجليدية المتأخرة والتي أدت الى نشوء الانسان .

#### (٧) \_ النظرية البارامغناطيسية :

اذا سلط مجال مغناطيسي شدة تدفقه (B) على مادة ما فان مستوى افلاك الالكترونات سوف تدور (Precess) ويتغير الزخم الزاوي للالكترون بحيث ان العزم المغناطيسي للذرة سوف يتقلص وتصبح الذرة دايا مغناطيسية (عكسية التمغنط) اي ان المادة تتمغنط بالاتجاه المعاكس للمجال الخارجي الممغنط وهذا يحصل خاصة في المواد التسي تكون فيها جميع المدارات الداخلية مشغولة بالالكترونات ومتناظرة . ويكون عزمها المغناطيسي صغيراً بصورة عامة . ومن المتوقع ان هذه المواد لا تتأثر بالحرارة او التفاعلات الكيميائية ، وخير مثال على هذه المواد هو (البزموث) . اما ذرات الأتربة القلوية والمواد الحديدية فان لذراتها عزم مغناطيسي دائمي خاص بها ، بسبب كون مدارات الكتروناتها الداخلية غير مكتملة الامتلاء بالالكترونات ، لذلك فان هذه المواد تنتظم مع المجال المغناطيسي الخارجي وتقويه ، وتسمى هذه المواد (البارامغناطيسية) ، وبما ان هذه العملية تشمل دوران الذرة بأكملها عند التمغنط فان هذه الذرات تتأثر بالحرارة والتفاعلات الكيميائية مثل سائل الاوكسجين .

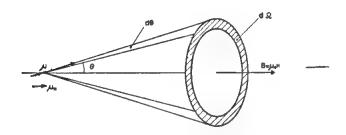
وتتواجد ظاهرة الدايامغناطيسية في جميع الذرات ولكنها لا تبرز احياناً في بعضها بسبب ظاهرة البارامغناطيسية المتغلبة عليها . فاذا دار الكترون حول نواة الذرة او حول نفسه ، فانه يكافىء صدفة مغناطيسية (Magnetic Shell) عزمها المغناطيسي ( $\mu$ ) يساوي ( $\pi$   $\Gamma$   $\Gamma$  ) حيث( $\pi$  ) هو نصف قطر الدوران ، ( $\pi$  ) التيار الالكتروني ، حيث :

$$I = \frac{e}{T} = \frac{e}{2\pi r} = \frac{eV}{2\pi r}$$

(e) هي شحنة الالكترون V سرعة الماسة T مدة الدوران . وبما ان نظرية التحميم للزخم الورون P حسب نظرية (بور) يعبر عنه بالعلاقة  $P = i\hbar = mV.r$ 

$$...\mu = \pi r^2 I = \frac{\text{rev}}{2} = \frac{i(e \hbar)}{2m} = i\mu B \qquad .... (\xi \Upsilon - \xi)$$

ويسمى  $\theta$   $\mu$  (مكنتون بور) وقيمته  $\theta$   $\theta$   $\theta$   $\theta$   $\theta$  المبير  $\theta$   $\theta$  . ولكي نعالج النظرية البارامغناطيسية ولتفسير قانون (كوري) التجريبي ، سوف نأخذ غازاً بارامغناطيسياً (مثل  $\theta$ ) مع إههال قوة التأثيرات الجزيئية وهذا ما تبرره التجربة ونضعه في مجال مغناطيسي شدة تدفقه  $\theta$  ويصنع زاوية  $\theta$  مع اتجاه العزم المغناطيسي  $\theta$  فان عزم القوة  $\theta$  المؤثرة عليه هو  $\theta$   $\theta$   $\theta$  ون الشغل المصروف (الطاقة الكامنة المغناطيسية  $\theta$  ) لتدوير الجزيئة من زاوية صفر الى  $\theta$  يساوى :



المخطط (٤ - ١) العزم المغناطيسي (4) دالة متصلة

$$E = \int_{0}^{\Theta} \tau \ d\Theta = \mu B \int_{0}^{\Theta} Sin\Theta d\Theta = -\mu B Cos\Theta \quad ... \quad (\xi \Psi - \xi)$$

فلو اخذنا الاحصاء التقليدي ، فانه يفترض ان طاقة الجزيئة (E) هذه هي دالة متصلة للزاوية  $(\Theta)$  وتتراوح هده الزاوية من (صفر) الى  $(\pi)$  كما من المخطط

$$Z = gie - E / kT$$
 : نُلْكُ فَانَ (\Lambda - \xi\)  $Z = e \mu \beta \cos \Theta / kT_{e}d\Omega$ 

:  $\Theta + d\Theta$  ,  $\Theta$  :  $\Theta$ 

... 
$$Z = 2\pi \int_{0}^{\pi} e^{-\mu} B \cos \theta / kT \sin \theta d\theta = 4\pi (\frac{kT}{B\mu}) \sinh (\frac{\mu B}{kT})$$

.. Ni = 
$$\frac{N}{Z}$$
 e<sup>-</sup> Ei /kT : ولكن

$$ni = \frac{n}{Z} e^- Ei / kT$$
 : ولوحدة الحجوم يكون

ولحساب معدل العزم المغناطيسي الموازي للمجال ( $\overline{\mu}_{
m H}$ ) لهـذه الجزيئـات فان :

$$\overline{\mu}_{H} = \frac{1}{Z} \int_{c}^{\pi} \mu \cos \Theta e^{-\mu\beta} \cos \Theta / kT_{2} \pi \sin \Theta d\Theta$$

$$= \mu \left[ \text{Coth} \left( \frac{\mu B}{kT} \right) - \frac{kT}{\mu B} \right] \qquad (\xi \circ - \xi)$$

وتسمى هذه العلاقة معادلة (لانجفين) Langvin, s formula ففي درجات الحرارة الواطئة والمجال القوى (AT أكبر كثيراً من kT ) فان :

$$Coth \xrightarrow{\mu B} \longrightarrow I \xrightarrow{kT} \longrightarrow o$$

$$\therefore \quad \overline{\mu}_{H} \rightarrow \mu \qquad \qquad \therefore \quad \overline{M}_{H} \rightarrow M \text{ sat}$$

 $M=n\mu$  و يسمى Msat هو عزم الاشباع المغناطيسي ، حيث Msat و الاستقطاب (العزم المغناطيسي لوحدة الحجوم) .

أي أن الجزيئات عند الصفر المطلق والمجال القوي ، تنتظم كلها مع المجال المغناطيسي المسلط . اما اذا كان المجال ضعيفاً ودرجة الحرارة مرتفعة ( $\mu$ B) أقل بكثير من  $\mu$ B) فان :

Coth 
$$X \approx \frac{I}{X} + \frac{X}{3}$$

$$X = \frac{\mu B}{kT}$$

$$\dots \overline{\mu}_{H} = \frac{\mu^{2}B}{3 \text{ kT}}$$

وعليه فان الاستقطاب (M)

$$\overline{M}_{H} = \frac{n \mu^{2} \mu r}{3 k T} \qquad \frac{H}{T} = C \frac{H}{T} \qquad \qquad \dots \qquad (\xi \nabla - \xi)$$

حيث  $\mu$  للمواد البارامغناطيسية  $\mu$  ثابت كيوري  $\mu$  هي النفاذية  $\mu$  الغناطيسية للوسط الذي يمر فيه المجال المغناطيسي  $\mu$  وتسمى المعادلة ( $\mu$  = 3  $\mu$   $\mu$  ) . فللاوكسجين مثلاً  $\mu$  = 3  $\mu$   $\mu$  ) . فللاوكسجين مثلاً  $\mu$  = 3  $\mu$   $\mu$  ) .

أما النظرية الحديثة والتي تفترض ان الفضاء مكمم ، أي ان الجزيئة المغناطيسية تأخذ اتجاهات محدد في الفضاء ، لذلك فان طاقتها مكممة ، ولقد ايد ذلك تجربة (كيرلاخ ـ شتيرن) على ذرات الفضة (لكونها مكممة باتجاه معاكس للمجال الخارجي) . لذلك فاذا اخذنا حالة شبيهة بذرات الفضة فان :

$$Z = e^{-\mu} B / kT + e + \mu B / kT = 2 Cosh X$$

$$(Cos \pi = -1), E \downarrow \uparrow = \mu B , (Cos O = I) E \uparrow \uparrow = -\mu B, X = \frac{\mu B}{kT}$$

$$\therefore ni = \frac{n}{Z} e^{-xi} = \frac{n e^{-xi}}{2 Coshx}$$

وعليه فان (الجزيئات الموازية للمجال) :

$$n_1 = n / f = \frac{n}{2\cosh x} e^x$$

$$n_2 = n / f = \frac{n}{2\cosh x} e^{-x} \qquad (Ulequal to the content of t$$

.. 
$$M = \mu (n_2 - n_1) = \frac{\mu n}{2\cosh x} (e^x - e^{-x})$$

... 
$$M = \mu n$$
.  $tanh X = M_{sat} tanh X$  .... ( $\xi V - \xi$ )

لذلك فللمجال القوي ودرجة الحرارة الواطئة يكون Msat (عـزم الأشبـاع  $M \approx \mu \, n \approx Msat$ 

أما للمجال الضعيف وللحرارة العالية فان:

$$M \approx (\frac{n\mu^2\mu r}{r}) \frac{H}{T} = \frac{c' H}{T} \qquad \dots (\Lambda \xi - \xi)$$

أي ان معامل كيوري في هذه الحالة هو ثلاثة اضعاف قيمته التقليدية .

#### أمثلة محلولة

o,E,2E,3E,...nE هي الطاقة المكنة لنظام من جسيات هي

(أ) برهن ان دالة الحجز (Z) عندما يكون 1 = gi تساوي:

$$Z = \frac{1}{1-e^{-}E/kT}$$
 . رب) احسب متوسط الطاقة لهذه الجسيات .  $kT$  في متوسط الطاقة عندما تكون E اقل من (ج.)

$$i = n$$

$$Z = \sum_{i = 0}^{\infty} gie^{-E_i / kT}$$

رأ) . . . .

: /=!

$$= I + e - E / kT + e - 2E / kT + ... = 1 + x + x^{2} + x^{3} + xn$$

$$= \frac{1}{1 - X} = \frac{1}{1 - e^{-}E / kT}$$

kTوذلك لأن E-E/kT أقل من الوحدة عندما تكون أكبر من

$$LnZ = -Ln(1 - X)$$

$$\therefore \frac{\partial LnZ}{\partial T} - \frac{E}{kT} \cdot \frac{1}{e^{E/kT}}$$

$$\cdot \cdot U = NkT^{2}(\frac{\partial LnZ}{\partial T})_{v} = \frac{NE}{e^{E/kT}}$$

$$E = \frac{U}{N} = \frac{E}{(eE/kT^{-1})}$$

(ج ) وعندما تكون E اصغر من kT فان :

$$e E / kT - 1 \approx \frac{E}{KT}$$

 $\bar{E} \approx kT$ 

(Y) نظام يتكون من (N) جسيمة تمتلك حالتين من الطاقة (E) أي (±) ولكنها حركية انتقالية . برهن الدرجة الحرارة الكلفنية (T) يعبّر عنها بالعلاقة :

$$\frac{1}{T} = \frac{k}{2E} \operatorname{Ln} \frac{\operatorname{NE} - \operatorname{U}}{\operatorname{NE} + \operatorname{U}}$$

$$Z = \sum gi - e^- Ei / kT$$

$$= e - E / kT + e + E / kT$$
 : الحل

... 
$$Ni = \frac{N}{Z} e^- Ei / kT$$

$$U = \sum NiEi = N_1 E_1 + N_2 E_2$$

$$= \frac{N}{Z} (Ee - Ee)$$

$$= EN \frac{(e-E/kT-eE/KT)}{(e-E/kT+eE/kT)}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين ونقل الحـدود المتشابهـة في المعامـل الأسسي نحصل :

$$(EN - U)e - E / kT = (U + EN)e E / kT$$

$$\frac{NE - U}{NE + U} = \frac{e + 2E / kT}{}$$

$$.. Ln \frac{NE - U}{NE + U} = \frac{2E}{\frac{kT}{T}}$$

$$\frac{I}{T} = \frac{k}{2E} Ln \frac{NE - U}{NE + U}$$

(٣) من الجسيات المتميزة موزعة على مستويي طاقة غير متحللة (٣) من الجسيات المتميزة موزعة على مستويي طاقة غير متحللة  $E_2=E$  ,  $E_1=0$ 

(أ) دالة الحجز . (ب) النسبة بين التوزيع في المستويين . (ج) الطاقة الداخلية للمجموعة . (هـ) السعة الحرارية ٧٠ للنظام .

 $Z = \sum e^{-Ei/kT} = I + e^{-k}kT$ 

$$\frac{Ni}{N} = \frac{e^{-Ei/kT}}{Z} \cdot \cdot \frac{NI}{N} = \frac{I}{I + e^{-E/kT}}$$
 (f)

$$\frac{N_2}{N} = \frac{I}{I + e E / kT} \cdot \cdot \frac{NI}{N_2} = \frac{I + e + E kT}{I + e - E kT} \quad (\smile)$$

$$U = \sum Ni Ei = N_2 E = \frac{NE}{I + e E / kT}$$
 (\(\sigma\)

$$F = -NkTLnZ$$
 (c) دالة هلمهولتر (الطاقة الحرة)

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = Nk Ln (I + e - E kT) + \frac{NE}{T(1 + e E / kT)}$$
 (الأنتروبي)

$$\cdots \quad Cv = \frac{\partial U}{\partial T} = Nk \quad X^2 e^{-X} / (1 + e^X)^2 \qquad (-A)$$

$$X = \frac{E}{kT}$$
: : :

(٤) مجموعة تتكون من ٣٠ جسيمة متميزة ، موزعة بالتساوي على ثلاث مستويات طاقة غير متحللة بحيث  $E_1 = 6$ ,  $E_2 = 4$ ,  $E_1 = 2$  (مقدره بالالكترون فولت). فلو نقصت المجموعة في المستوى الثاني بمقدار جسيمتين ؛ اوجد التغير في سكان المستويين الاخرين في حالة الاتزان الثرموداينميكي ، واحسب النسبة بين قيم الاحتالين الثرموداينميكيين للتوزعين .

 $N_1 = N_2 = N_3 = 10$   $N_1 + N_2 + N_3 = 30 = CONSTANT$ 

$$\delta N_2 = -2 ... \delta N_1 + \delta N_3 = -\delta N_2 = 2 .....(I)$$
 :

. . 
$$U = \sum Ni \ Ei = CONSTANT$$
 . .  $du = 0$ 

. . 
$$\delta N_1 \; E_1 \; + \delta \, N_2 \; E_2 \; + \delta \, N_3 \; E_3 \; = o$$

$$...8N_1 + 3 \delta N_3 = 4 \dots (2)$$
 : وبالتعویض نحصل

اما الاحتالية الثرموداينميكية ( $\Omega$ ) (راجع بداية الفصل).

$$\Omega = \frac{N!}{N!N!N!}$$

.. 
$$\Omega_1 = \frac{30!}{10! \ 10! \ 10!}$$
,  $\Omega_2 = \frac{30!}{11!8!11!}$ 

$$\frac{\Omega_{1}}{\Omega_{2}} = \frac{(11!)^{2} \, 8!}{(10!)^{3}} \, \frac{121}{90} : ( |\nabla u|^{2})^{3} | |\nabla u|^{2}$$

(٥) نظام من (N) جسيمة متميزة وغير متحللة بدرجة (T) تخضع لتـوزيع

بولتزمان ، برهن ان الحرارة النوعية Cv للمجموعة يعبر عنها بالعلاقة :

$$Cv = \frac{Nk}{T^2} \left[ \frac{Z''}{Z'} - \left( \frac{Z'}{Z} \right)^2 \right] = \frac{N}{kT} (\overline{E}^2 - \overline{E}^2)$$

- حيث  $\overline{\mathbf{E}}^2$  هو متوسط مربع الطاقة (مربع القيمة الفعالة للطاقة).

$$U = -NkT^{2} \left(\frac{\partial LnZ}{\partial T}\right)_{v,N} = -\frac{Nk}{Z} \frac{\partial Z}{\delta (1/T)} = -Nk \frac{Z'}{Z}$$

$$Z' = \frac{\partial Z}{\delta (1/T)}$$
,  $Z'' = \frac{\partial^2 Z}{\delta (1/T)^2}$ 

$$Cv = (\frac{\partial U}{\partial T}) = -\frac{I}{T^2} \left[ \frac{\partial U}{\partial (1/T)} \right] = \frac{Nk_2}{T^2} \frac{\partial \left( Z'/Z \right)}{\partial \left( 1/T \right)}$$

وباكمال التفاضل نحصل:

$$Cv = \frac{Nk}{T^2} \left[ \frac{Z^{11}}{Z^1} - (\frac{Z^1}{Z})^2 \right]$$

حيث Z هي دالة الحجز لنظام واحد . وبما ان متوسط الطاقة تساوي :

$$\bar{E} = \frac{I}{N} \sum EiNi = Ei \sum \frac{Ni}{N} = \sum_{i} Ei Pi$$

حيث Pi يمثل احتمالة تواجد Ni جسيمة في مستوى الطاقة Ei ، ولكن :

$$Ni = \frac{N}{Z} e^{-}Ei / kT , Pi = \frac{e^{-}Ei / kT}{\sum e^{-}Ei / kT}$$

$$... \overline{E} = \frac{i \sum E ie - Ei / kT}{i \sum e - Ei / kT}$$

وبتفاضل Z بدلالة  $\frac{I}{T}$  نحصل :

$$\frac{\partial Z}{\partial (1/T)} = -\frac{I}{k} \sum_{i} Ei e^{-i} Ei / kT = Z'$$

$$... k \tilde{E} = \frac{I}{Z} \frac{\partial Z}{\partial (1/T)} = \frac{Z^{1}}{Z}$$

$$k \left[ \frac{\partial \widetilde{E}}{\partial (1/T)} \right] v = \left[ \frac{\partial (Z'/Z)}{\partial (1/T)} \right] v$$
 : خذلك :

$$= -\frac{Z^{11}}{Z} - (-\frac{Z^{1}}{Z})^{2}$$

$$Z'' = \frac{\partial Z'}{\partial (1/T)} = \frac{I}{k^2} \sum Ei^2 e^- Ei / kT$$
 : عیث

$$\frac{Z''}{Z} = \frac{\sum Ei^2 EXP - Ei \ kT}{i \sum EXP - Ei \ / kT} = \frac{\overline{E}^2}{K^2} \qquad :$$

$$(\frac{Z^1}{\bar{Z}})^2 = \frac{\bar{E}^2}{K^2}$$
 : كذلك

.. 
$$Cv = \frac{Nk}{T^2} \left( \frac{Z''}{Z'} - \frac{Z'}{Z} \right) = \frac{N}{kT^2} \left( \vec{E}^2 - \vec{E}^2 \right)$$

#### تمارين الفصل الرابع

١ ما الفرق بين الحرارة والشغل بالمفهومين الثرموداينميكي
 والاحصائى ؟

۲ ـ برهن ان الانتروبي يزداد بمقدار (NkLn₂) عندما يتمدد الغاز المثالي في الفراغ الى ضعف حجمه (تمدد حر) حيث (N) عدد جزيئاته (استخدم معادلة تترود ـ ساكور).

(٣) غاز عدد جسياته (N) يخضع لاحصاء (. M.B) ، برهن ان معدل عدد الجسيات Ni في المستوى ايساوي :

 $N/kT \left( \frac{\partial LnZ}{\partial Ei} \right)T$ 

 $^{2}$  ي برهن ان متوسط الطاقة الكامنة التثاقلية لجزيئة الهواء بدرجة T تساوي  $^{1}$  kT .

، عينٌ معامل بولتزمان ( $\mathrm{e}^{-\mathrm{E}\ kT}$ ) للقيم التالية للطاقـة  $\mathrm{E}\ :$  O kT, kT

(الجواب : ۲,۳۶۷,۱ • × ۱۰- )

٦ عين قيمة ! 20 بطريقة مباشرة وبطريقة معادلة سترلينج وجد الخطأ
 النسبى .

ر نلاثة جسيات (N = 3) متميزة c,b,a تشغل خلية واحدة ، بـينّ انهـا V . المتعارع الى ستة حالات متميزة الترتيب ، وبرهن ان هذا العدد يساوي V .

 $N_z = 2$  , Ni = 1 في المسألة الأخيرة لو توزعت الجسيمات الى مجموعتين المسألة الأخيرة لو توزعت الجسيمات الى متميزة وقبل أن ان مناك ثلاثة توازيع متميزة فقط . وثلاثة اخرى متماثلة (غير متميزة) وبين ان عدد التوزيعات المتميزة (المايكر وستيت) يساوي !  $N_1$ !  $N_2$  وضع بمخطط .

: فبرهن F = u - Ts فبرهن F = u - Ts فبرهن F = - kNT (Ln  $\frac{Z}{N}$  + I)

ثم عينّ F لغاز مثالي .

الأكثر احتالاً . واحسب النسبة بين الاحتالين. لو اخذنا جسيمتين من  $^{\circ}$  على ثلاثة مستويات طاقة (صفر ، 2E,E ) ولها نفس التحلل (gi) جد عدد الجسيات في كل مستوى للتوزيع الأكثر احتالاً . واحسب النسبة بين الاحتالين. لو اخذنا جسيمتين من  $^{\circ}$ 

واضيفت واحدة منها للمستوى ,N واخرى للمستوى . N

 $N_1 = N_2$  ،  $N_2 = N_3$  ،  $N_3 = N_4$  ) الجواب :  $N_3 = N_3$  نسبة الاحتاليتين = 9,77 ،  $N_3 = N_3$ 

11 \_ اذا علم ان ترتيب الجسيات داخل فضاء الطور لا تؤثر على الحالة المجهرية للنظام ، فبرهن ان هناك اربعة حالات مجهرية متميزة من مجموع ٢٤ طريقة توزيع (١٩)(c),(b),(c),(b),(a) موزعة بين صندوقين ، الأول يحتوي على جسيمة واحدة والثلاثة الأخرى موزعة في الصندوق الثاني ؛ وضح جوابك بمخطط .

17 \_ اذا كانت دالة الحجز (Z) لبلورة اينشتاين يعبّر عنها بالمعادلة :

$$Z = \frac{e - hf / 2kT}{I - e - hf / kT}$$

والبلورة تحتوي على عدد افوكادرو (No) من الجسيات ، فاحسب : (أ) دالة هلمهولتز (F) ، (ب) الضغط P ، جـ)الانتروبي S .

التميزة المستقلة ، كل منها قادرة على No من الجسيات المتميزة المستقلة ، كل منها قادرة على  $\frac{Cv}{R}$  التواجد في حالتي طاقة غير متاثلة (صفر ، E ) ، احسب  $\frac{cv}{R}$  ثم ارسم  $\frac{kT}{R}$  كدالة الى  $\frac{kT}{R}$  من قيمة  $\frac{kT}{R}$  من صفر الى (1) .

ا یا جموعة من ستة جسیات متمیزة متوزعة علی ثلاثة مستویات طاقـة  $E_3=2E$  .  $E_2=E$  ,  $E_1=0$  ، غیر متحللة ،

.  $(N_1, N_2, N_3 = 3, 2, 1)$  الاحتالية الثرموداينميكية للتوزيع

(ب) طاقة المجموعة في حالة الاتزان (قيمة  $\Omega$  ذروتها) .

الجواب : (أ) ۲۰ ، (ب)

U=6E ,  $\Omega=90$  ,  $N_{\scriptscriptstyle 1}=N_{\scriptscriptstyle 2}=N_{\scriptscriptstyle 3}=2$ 

۱۰ - برهن ان سرعة التفاعل الكيميائي تزداد ١٦ ضعفاً اذا زيدت درجة الحوارة عند ٢٠٠ ك بمقدار ٢١٪ .

17 ملح بارامغناطیسی بدرجة حرارة " " ك یحتوی علی " ۱ " ایون مغناطیسی للمتر المکعب بعزم  $\mu$  لکل ایون ، احسب الفرق بین عددها التی تنتظم مع المجال او بعکسه ، اذا كانت شدة المجال " ۱ كیلو اورستد. ثم احسب العزم المغناطیسی للهادة اذا كان حجمها " ۱ سم" (الجواب ۲,۲٪  $\times$  " ایون ، اورستد - سم")

١٧ \_ جد قيمة المفكوك:

$$\frac{4}{\begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix}} i^2 = \frac{3}{\begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix}^2} \frac{3}{\begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix}} (2S+1)$$

# الفصل الخامس نظريات الحرارة النوعية (٥ - ١) الحرارة النوعية

(أ) الحرارة النوعية للجزيئات الثنائية الذرة:

(The specific heat of diatomic molecules)

ان الجزيئات الأحادية الذرة للغاز تشابه في خواصها الغاز المثالي لكونها تمتلك طاقة حركية انتقالية فقط ، اما الجزيئات الثنائية الذرة فان طاقتها الكلية تتكوّن من طاقة انتقالية (Er) ودورانية (Er) واهتزازية (Ev) اضافة الى الطاقة الالكترونية (Er) والتي تهمل عادة لأنها نادراً ما تشارك في اقتسام الطاقة في درجة حرارة الغرفة لأن طاقة الاثارة (Excitation energy) عالية تقارب واحد الكترون فولط (ا. ف أو د. v. ع). ويستثنى من ذلك غاز اول اكسيد النايتروجين (No) فهو من الأمثلة القليلة للجزيئات الثنائية الذرة التي يمكن إثارة بعض الكتروناتها عند درجات الحرارة الواطئة ؛ . . . اذ تمتلك الجزيئة مستويي طاقة ، الفرق بينها يقارب الواطئة ؛ . . . أ ف . وهذه الطاقة تعادل الطاقة الحرارية KT عند درجة ° ۱۸ ك . وباستثناء ذلك فان معظم الغازات الثنائية الذرة يكون متوسط فاصلة الطاقة (ΔΕο) تقارب ٥ (إ . ف . ) ، وهذه المحكمية لا يمكن توفرها حرارياً إلا في درجة تقارب معف هذه الدرجة ، لذلك عكن اعتبار تأثير الاثارة الالكترونية على الحرارة النوعية في درجات الحرارة المعتادة مهملاً .

أما الطاقة الدورانية فتقارب ١٠ ــ ١٠ ف . والاهتزازية من ٢٠١ . ف . الله الطاقة الدورانية هي المهيمنة في الى ١٠٠٠ إ . ف ، لذلك فان حالات التهيج (الأثارة) الدورانية هي المهيمنة في الجزيئات في درجة حرارة الغرفة .

ولحساب الحرارة النوعية للجزيئات المتعددة الذرات

(Poly atomic molecules) فانه يتطلب حساب توزيع جزيئات الغاز بين الحالات الاهتزازية والدورانية . وسوف نقتصر على جزيئات الغاز الثنائية الذرة للسهولة .

ان ميكانيك التكميم يعطي الطاقة الدورانية للجزيئات الثناثية الـذرة من المعادلة :

$$Er = \frac{L^2}{2I} = \frac{\hbar^2 (1+1)1}{2I} \qquad (1-6)$$

حيث I يمثل عزم القصور الذاتي للجزيئة التي تدور حول محور عمودي يمر خلال مركز كتلتها . (1) عدد صحيح (صفر ، ۲ ، ۷ ، ، . . . . . . . . . . . . . الزخم الزاوي للجزيئة حول محور دورانها ، وهو يأخذ القيم (1+1) من الأوضاع المتساوية الطاقة ، بسبب التكميم الفضائي (Space Quantization) للزخم . لذلك فان :

$$..N_{r} = \frac{N}{Z_{r}} (2l + 1) e - E_{r} / kT = \frac{N}{Z_{r}} (2l + 1) e - l (1 + 1) \Theta_{r} / T$$

$$\frac{\hbar^2}{2Ik} = \Theta r$$
 حيث  $\Theta r$  درجة الحرارة الميزة للدوران

... 
$$Zr = \sum (2l + 1)e - l(1 + 1)\Theta r / T$$
 ...  $(Y - 0)$ 

فعندما تكون T اكبر من Θτ فان اعداداً كبيرة من الحالات الدورانية ستكون مشغولة ، وستكون الفاصلة (dE) بين مستويات الطاقة صغيرة مقارنة بالمقدار (kT) لذلك يمكن حساب (Zr) بطريقة التكامل وباجراء التقريب :

$$1(1+1) \approx 1^2$$
  $2l+1=2l$  فنحصل

$$Zr = \int_{0}^{\infty} 2l e - \Theta r l^{2} / T \quad dl = \frac{T}{\Theta r}$$

. Ln 
$$Z_r = Ln T - Ln \Theta_r$$

$$\therefore Ur = NkT^2 - \frac{\partial LnZ_r}{\partial T} = NkT = \frac{N}{No}RT$$

لذلك فان كانت الطاقة انتقالية ودورانية فقط فان الطاقة الداخلية الكلية(U)

للمول الواحد تساوي :

$$U = Ut + Ur = RT + \frac{3RT}{2} = \frac{5RT}{2}$$

$$Cv = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{5R}{2}$$

ففي الجدول (٥ ـ ١) نجد ان  $\Theta$  تكون دائهاً أقل من T في درجات الحرارة العادية . وهذا ما يبر ر التقريب اعلاه .

اسم المادة	θ <sub>r</sub> (k)	Ov (k)
H <sub>2</sub>	85.5	6140
O <sub>2</sub>	2.09	2260
CL <sub>2</sub>	0.0347	810
Na	0.224	230
1 {		

الجدول (٣- ١) - درجات الحرارة المميزة الدورانية والاهتزازية لبعض المواد

ولحساب الطاقة الاهتزازية (Vibrational Energy) للغاز الثنائي الذرة ، نفترض ان الذرات في الجزيئة تهتز بحركة توافقية بسيطة ، لذلك ، فان طاقة الاهتزاز يعبّر عنها بالعلاقة التكميمية التالية :

$$\epsilon \mathbf{v} = (\mathbf{i} + \frac{1}{2}) \hbar \mathbf{w}$$
 (Y-0)

$$W=2\pi f$$
 ( التردد) التردد) التردد) التردد

نا عدد صحیح (صفر، ۱، ۲، . . . . . ) وبما ان gi = I لأن حالات الطاقة غير متحللة ، وهي تشمل ايضاً الذرات المهتزة في البلورات ، كما سنرى :

$$N_{v} = \frac{N}{Z_{v}} e^{-(i+1/2)} \hbar W / kT = \frac{N}{Z_{v}} (i+1/2) \Theta_{v/t} \leftarrow^{E_{v}}$$

حيث  $\frac{hf}{k} = \Theta v$ وتسمى درجة الحرارة المميزة الاهتزازية الجدول (١-١) وهي تكون دائماً اكبر من  $\Theta$  كها في الجدول. وبذلك فانها تكون أعلى من درجة حرارة الغرفة في أغلب الأحيان ، وغالباً ما تتأين الجزيئة قبل ان تشارك طاقتها الاهتزازية في الطاقة الداخلية للغاز .

$$Z_v = \sum e^-(i + \frac{1}{2}) \Theta_v / T = e - \Theta_v / 2T \cdot \sum_{i=0}^{\infty} e^-i \Theta_v / T$$

$$\sum_{0}^{\infty} X^{n} = I + X + X^{2} \dots X_{n} = \frac{I}{I - X}$$
 ولكن

على شرط ان تكون (X) اقــل من الوحــدة (متــوالية تناقصية) وبوضع  $X = e - \Theta v / T$ 

$$Zv = \frac{e^{-}\Theta v/2T}{I - e^{-}\Theta v/T}$$

. . 
$$LnZv = -\Theta v/2T - Ln(I - e^{-\Theta v/T})$$

$$\frac{\partial \text{LnZv}}{\partial T} = \frac{\Theta v}{2T^2} + \frac{\Theta v/T^2}{(e^{\Theta v}/T - 1)}$$

. . 
$$Uv = N kT^2 \frac{\partial LnZv}{\partial T}$$

$$Uv = \frac{1}{2} Nk\Theta v + \frac{Nk\Theta v}{(e^{\Theta v} / T_{-1})}$$

وبما أن (½ ħW) تمثل طاقة الصفر المطلق الاهتزازية (i = 0) وهي تساوي

الم الم الم الم الحد الأول يمثل طاقة الصفر المطلق الاهتزازية للغاز ( $\frac{6}{1}$  Nk $\Theta$ ) الدرجات الحرارية العالية تكون  $\frac{\Theta}{1}$  صغيرة وتصبح :

$$e \Theta v / T - I \approx \frac{\Theta v}{T} +$$

... 
$$U_V = \frac{1}{2} Nk\Theta_V + NkT = NkT (I + \frac{\Theta_V}{2T})$$

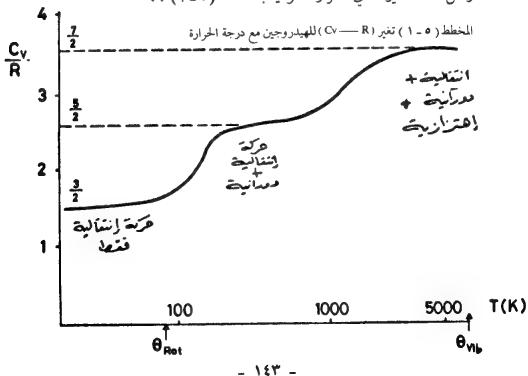
وتكون الطاقة الكلية للمول الواحد:

$$U = U_r + U_t + U_v$$
. =  $\frac{3}{2}$  No kT + No kT + NokT (I +  $\frac{\Theta v}{2T}$ )

$$U = \frac{3}{2}RT + RT + RT \cdot (T >> \Theta_v)$$

$$\dots Cv = \frac{7R}{2}$$

وتمثل هذه التغيرات في الحرارة النوعية بالمخطط (٥-١)...



### (ب) \_ الحرارة النوعية للجوامد البلورية العازلة :

يستخدم الميكانيك الإحصائي لحساب الحرارة النوعية للجوامد العازلة فقط، وذلك للتقليل من المتغيرات التي تؤثر على طاقة النظام (مثل الالكترونات الحرة في المعادن) ولكون موقع ذراتها شبه ثابت في الهيكل البلوري، لذلك فيمكن اعتبار الذرات متميزة ومتفاعلة بقوة مع جارتها. فاذا ازيجت الذرة قليلاً عن موقع اتزانها، فانها تؤثر على جميع الذرات وتتحرك حركة توافقية بسيطة بالاتجاهات الثلاثة (X.Y.Z) وعليه فهناك (3N) درجة حركة حرة لنظام يحتوي على (N) ذرة، أي ان هناك 3N مهتز توافقي بسيط (Simple Harmonic Vibrator) ومستقل ومتميز وكها ذكرنا سابقاً فان طاقة الاهتزاز للمذبذب الواحد تساوي:

$$Ei = (i + \frac{1}{2}) hf$$
 ...  $(\xi - \delta)$ 

لذلك فان مستويات الطاقة هي  $\frac{3}{2}$  hf,  $\frac{3}{2}$  hf,  $\frac{1}{2}$  . . الخ ولا توجد أكثر من حالة تكميم واحدة ، تمتلك نفس الطاقة ، أي أن 1=g وكذلك فان الجسيات متميزة وعليه فان الاحتالية الثرموداينميكية يعبّر عنها بالمعادلة تكفي .

$$\Omega = \frac{N!}{\prod N!!}$$

ولا يجاد دالة التوزيع نستخدم نفس الأسلوب الذي سلكناه في اشتقاق دالة ماكسويل \_ بولتزمان ، فنحصل على :

$$Ni = \frac{N}{Z} e^{-E} i / kT \qquad \dots (6-6)$$

$$Z_{f} = \sum e^{-} E_{i} / kT$$
 ..... ( $\Im - \delta$ )

... 
$$U_f = N_f kT^2 \left( \frac{\partial Ln Z_f}{\partial T} \right) V$$
 ....  $(V - 0)$ 

$$P = N_f kT \quad (\frac{\partial L_n Z_f}{\partial V})T \qquad \qquad \dots (\Lambda - \bullet)$$

$$S_f = N_f kTLn Z_f + U_f / T \qquad \qquad \dots \qquad (9 - 0)$$

ويمكن حساب،Z بسهولة لكون الطاقة مكممة ، والمتواليات تناقصية :

... 
$$Zf = e - (i + \frac{1}{2}) hf / kT$$

$$= e^{-} hf / 2kT (e^{-} hf / KT + e^{-} 2hf / KT +)$$

$$= = e^{-hf/2kT} \left( \frac{I}{I - e^{-hf/KT}} \right)$$

.. 
$$Ln Z_f = -\frac{hf}{2kT} - Ln (I - e^{-hf} / KT)$$

.. 
$$U_f = N_f \left( \frac{hf}{2} + \frac{hf}{e^- hf/kT - I} \right)$$

أي أن طاقة المذبذب الواحد هي :

$$\frac{-}{E_f} = \frac{Uf}{Nf} = \frac{1}{2} hf + \frac{hf}{e - hf / kT - I} \qquad \dots \qquad (1, -0)$$

وعموماً فان المذبذبات التي عددها 3N لا تمتلك نفس التردد ولنفرض ان dNf هو عددها المحصور بين التردد f + df,f لذلك فان :

 $dN_f = g(f)df$ 

$$3N = \int dN_f = \int g(f)df$$
 نحیث ان

حيث g(f) هو عدد انماط (Modes) التذبذب لوحدة التردد ، وعليه فان :

$$U = \int \vec{E}_f dN_f = \int \left( \frac{hf}{2} + \frac{hf}{e hf / kT - I} \right) g(f) df$$

ولقد افترض اينشتاين بأن جميع المذبذبات ذات تردد واحد (fe) ويسمى بتردد

اينشتاين ، وعليه فان cv للمول الواحد :

$$Cv = \frac{dU}{dt} = \frac{3Nok}{(e^{h \text{ fe}/kT} - 1)} = \frac{(h \text{ fe}/KT)^2 e^{h \text{ fe}/KT}}{(11 - 0)}$$

وتسمى الكمية  $h_{fe}$  /k بدرجة حرارة اينشتاين المميزة (Θe) . وتقتصر اهمية هذه النظرية على الناحية التاريخية فقط، لأنها كانت اول محاولة لتطبيق قوانين التكميم على الحرارة النوعية للجوامد . وتمكّنت من تفسير اقتراب Cv /3R من الوحدة عندما تقترب (T) من اللانهاية ، طبقاً لقانون (دولونك وبتيت) ، كذلك تنبأ باقترابها من الصفر ، كلها اقتربنا بها من الصفر المطلق . ولكن ذلك يتم اسرع من الواقع التجريبي .

ولقد وضع (ديباي) نظرية اكثر عمقاً ونجاحاً من نظرية اينشتاين ، وذلك بافتراضه ان البلورة هي وسط شبه متصل (Continuous Medium) يسند الأمواج الصوتية الواقفة الطولية منها والمستعرضة ، لأنه تتواجد في الجوامد ، نوعان من أمواج المرونة ، طولية سرعتها (VI) ، ومستعرضة سرعتها (Vt) وان عدد انماط الاهتزازات الطولية المحصورة بين f + df,f تساوي :

$$g(l) df = \frac{4 \pi v \cdot f^2 df}{Vl^3} \qquad \dots \qquad (1 \ Y - \bullet)$$

وللأمواج المستعرضة (لها ضعف الحركة الحرة) ، لذلك فان :

$$g_t(f) df = \frac{8\pi V \cdot f^2 df}{V_{t^3}} \qquad \qquad \dots \quad (V - \bullet)$$

لذلك فان مجموع انماط التحلل g(f)df لهذه الأمواج تساوي :

$$g(f)df = 4\pi V \left[ \frac{I}{V^3} + \frac{2}{V^3} \right] f^2 df$$
 .. (15 - 0)

وبما ان الجسم الصلب ليس وسطاً متصلاً بل يتكون من تراكيب ذرية عددها

: حيث (fm) لذلك فان انماط الاهتزاز تتحدد بتردد القطع (fm) حيث

$$3N = \int_{0}^{\infty} g(f)df = 4 \pi V \left[ \left( \frac{I}{V_{i}^{3}} + \frac{2}{V_{t^{3}}} \right) \right] \int_{0}^{fm} f^{2} df$$

... 
$$3N = 4 \pi V \left( \frac{I}{V_{l^3}} + \frac{2}{V_{t^3}} \right) \frac{f_m^3}{3}$$
 : the second of the

$$g(f)df = 9 \frac{Nf^2df}{fm^3} \qquad \qquad \dots (10-0)$$

وباستخدام تقريب ديباي اعلاه نحصل (للمول الواحد) :

$$\frac{\text{Cv}}{3R} = \int_{0}^{6} (3f^{2} / f_{m}^{3}) \frac{(hf / kT)^{2} e^{hf / kT}}{(e^{hf / kT} - 1)^{2}}$$

وبالتعويض عن  $\Theta$  (درجة حرارة ديباي المميزة) بالمقدار  $\frac{hf_m}{k}$ 

 $X = \frac{hi}{L}$  : تصبح المعادلة اعلاه بالصيغة :

$$\frac{Cv}{3R} = \frac{3}{(\Theta_D / T)^3} \int_0^{(\Theta_D / T)^3} \frac{e^x dx}{(e^x - 1)^2} \cdot \dots \cdot (17 - 9)$$

فعندما تقترب (T) من اللانهاية فان  $\frac{\Theta D}{T}$  تكون صغيرة وتصبح المعادلة : (٥ - ١٦) بالصيغة المقر به :

$$\frac{Cv}{3R} \approx 1/3 \left(\frac{\Theta D}{T}\right)^3$$

أما اذا اقتربت (T) من الصفر المطلق فان التكامل العددي للمعادلة (٥ - ١٦) يعطى :

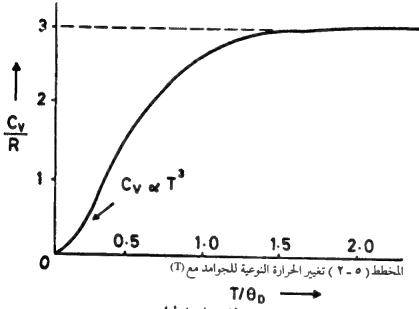
$$\frac{\text{Cv}}{3\text{R}} \approx 77.9 \left(\frac{\text{T}}{\Theta \text{ p}}\right)^3 \qquad \dots (1\text{V} - \text{\circ})$$

أي ان (Cv) تقرب من (3R) في درجات الحرارة العالية ، وهذا ما يبرره الجدول (Cv) للعديد من المواد :

OD(K)	200	730	321	233	470	2230	420	366	636	93	67	315	26
المادة	Insb	Lif	Nacl	Kel	Sio,	الماس	الغرافيت	Ge	Si	Α	Ne	Zns	Hz

الجدول (٥ - ٢) - (درجة حرارة ديباي (OD) لبعض المواد الغير معدنية)

ولقد أيدت التجارب صحة نظرية (ديباي)، ولا سيما في درجات الحرارة الواطئة . ولا يظهر الاختلاف الطفيف الا عند قياس Cv بدقة عالمية ولا سيما في مديات الحرارة الوسطية . وهناك نظريات اكثر تعقيداً وتفصيلاً لا مجال لذكرها .



→ T/0<sub>0</sub>

مارين الفصل الخامس

۱ \_ اذا علم ان عزم القصور الذاتي لجزيئة غاز (co) هي ۱,۳ × ۱-۲۰ غم . سم احسب مقدار ما تضيفه الحركة الدورانية لحرارته النوعية Cv في درجة حرارة الغرفة .

$$\Delta Cv = R$$
 : |

٢ - احسب الزيادة في الحرارة النوعية (ΔCV) لمول من غاز النايتر وجين بتأثير
 الحركة الاهتزازية بدرجة ١٠٤ ك ، مع العلم ان :

 $\Delta E_v = E_z - E_{_1} = 0.3ev$   $\Delta C_V = 0.37R$  :  $| - E_z - E_{_1} | = 0.3ev$ 

عن الخطأ الناتج في حساب (Z) عنـ د تقـريب 1+2 بالمقدار 1 و المقدار 1+1 بالمقدار 1 في المعادلة (-2) .

لا حسب النسبة بين عدد جزيئات ثنائية الذرة لغاز مثالي في حالة القرار  $T = \Theta$  وفي اول حالة متهجة  $T = \Theta$  دورانية في درجة الحرارة  $T = \Theta$ 

الجواب : 37% : 0: 43,2% ، 1 على التوالي

مول من غاز Co بدرجة ۳۰۰ ك ، احسب عدد الجزيئات في الحالات الاهتزازية الثلاثة الأولى للطاقة .

٦ ـ احسب،٧١,٧ في النحاس من معرفة كثافته وثوابت مرونته .

٧ - اذا كانت درجة حرارة ديباي المميزة ΘD ودرجة حرارة اينشتاين المميزه (Θe) للماس ' ۱۸۹ ك ، ۱۶۰ ك على التوالي وان قيمة ۲۰۷ المقاسة للهاس في درجة ۲٬۷ ك هي : ۲٫۲۸ كيلو جول/كيلو مول . ك ، فاحسب ۲۰۷ بدرجة ۲٬۷ ك من معادلتي ديباي ، واينشتاين وقارن بين التجربة والنظرية .

الجواب : ۱,۱۲ کیلو جول/کیلو مول. ك ، ۲,٦٦ کیلـو جول/کیلـو مول . ك .

: باحسب ،  $\frac{\theta_{\rm v}}{2}$  ، احسب ، الذرة بدرجة حرارة منائية الذرة بدرجة حرارة منائية الذرة بدرجة حرارة منائية الذرة بدرجة حرارة منائية المنائية الذرة بدرجة حرارة منائية المنائية المن

(أ) عدد الجسيات عند اول ثلاثة مستويات للطاقة الاهتزازية الواطئة .

ب) طاقة النظام الاهتزازية

الجواب : (أ) ١٦٥ ، ١١٧ ، ١٦ جزيئة (ب) ×149k



# الفصل السادس

احصاء التكميم الحديث (Modern quantum statistics)

(۱ - ۱) مقدمة : -

ان الاحتالية الثرموداينميكية لأية حالة منظورة من نظام تعتمد على نوعية الاحصاء الذي تخضع له هذه الجسيات . ففي الاحصاء التقليدي الذي تطرقنا اليه سابقاً لم تتواجد قيود على كمية الطاقة او عدد الجسيات التي تشغل أي من مستوياتها ، ففي احصاء التكميم تتحدد قيم الطاقة (أي انها دالة منفصلة).كذلك فان دراسة الأطياف الذرية والجزيئية للمواد المختلفة ، أثبت ان كل الجسيات الأولية مثل الالكترونات والنيوترونات والبروتونات وكذلك الجسيات المركبة منها الأولية مثل الالكترونات والإيونات لها زخم زاوي ذاتي او برم مشل الدرات والجزيئات والآيونات لها زخم زاوي ذاتي او برم مشل الالكترون عن دوران الجسيم (مثل الالكترون) حول نفسه . كذلك فان بعض الجسيات مشل الالكترونات خضع لقانون باولي (Pauli Exclusion Principle) والذي ينص على انه لا توجد في خلية فضاء الطور جسيمتين متاثلتين في الفتل (البرم) ولهذه الاعتبارات هناك نوعان خلية فضاء الطور جسيمتين متاثلتين في الفتل (البرم) ولهذه الاعتبارات هناك نوعان من الاحصاء استحدثت لمعالجة هذه الضوابط:

# (Bose Einstein Statistics) احصاء بوز - اینشتاین

ويرمز له اختصاراً (B - E) وتتميز جسياته التي يطلق عليها بوزونات (Bosons) بان فتلها يكون صفراً او الوحدة من الكمية  $\hbar$  وهي لا تتقيد بقانون الاستثناء لباولي . كذلك فان مجموع جسيات النظام لا يبقى ثابتاً ، وبامكان أي خلية من فضاء الطور أن يشغلها أي عدد من الجسيات . وتكون الجسيات متحللة (Degenerate) وغير متميزة (متاثلة) ومن أمثال البوزونات هي الفوتونات  $(S = \hbar)$  والكرافيتونات  $(S = 2\hbar)$  . والأخيرة تمثل اكمام طاقة الجاذبية التثاقلية (Gravity Quanta) .

#### (Fermi-Dirac statistics) دايراك دايراك ۲

ويرمز له اختصاراً (. F.- D.) . فان جسياته تسمى فرميونز (Fermions) وهي ذات برم (\$ = 2 / \hbar ) وتخضع لقانون الاستثناء لباولي ، وتشمل مجموعة كبيرة من الجسيات مثل الباريونز (بروتونات ، نيوترونات . . ) واللبتونات (Leptons) وتشمل الكترونات ونيوترينات ، ميزون ميو (ميون Muon) ، والهايبرونات (Hyperons) إضافة الى جزيئات الهايدروجين والهيليوم .

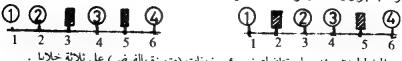
ففي درجات الحرارة العالية والكثافة الواطئة تتساوى احصاءات التكميم جميعها بضمنها احصاء (. M.B) التقليدي كها سنرى في نهاية الفصل .

وسوف نتطرق الى النوعين من الاحصاءات الحديثة بشيء من التفصيل مع بعض تطبيقاتها التي عجزت على حلها الاحصاءات التقليدية .

# (۲ - ۲) - احصاء بوز - اینشتاین

بالرغم من ان البوزونات متاثلة ، إلا انه من المفيد ان نشتق الاحتالية الثرموداينميكية لجسيات متميزة مشل c,b,a ولكن سوف نقسم الاحتالية الشرموداينميكية الناتجة بالمضروب ! Ni لكون الجسيات غير متميزة (Indistinguishable) ولكون البوزونات لا تتقيد بقانون باولي ، لذلك فبامكان كل خلية طور من استيعاب أى عدد منها .

فلو فرضنا  $N_i$  البوزونات موزعة على  $N_i$  من خلايا فضاء الطور والتي طاقتها  $N_i$  عند المستوى  $N_i$  ولغرض ايجاد  $N_i$  ولغرض ايجاد  $N_i$  وضع  $N_i$  وخلية بحب وضع  $N_i$  والغرض  $N_i$  التوزيع  $N_i$  من البوزونات على  $N_i$  خلية ، نتصور هناك كذلك لا يجاد عدد المرات  $N_i$  التوزيع  $N_i$  و  $N_i$ 



المخطط (٦ ـ ١) ـ طريقتان لتوزيع ٤ بوزونات (متميزة بالفرض) على ثلاثة خلايا .

ولنبدأ باضافة البوزونات واحداً كل مرة . حتى اذا وضعت  $N_i$  منها في مواقعها تبقى  $1-g_i$  من المواقع تسمى الجدران . فان البوزون الأول يمكنه من احتلال اي من المواقع  $N_i+g_i-1$  والثاني  $N_i+g_i-1$  موقعاً . أما البوزون في الترتيب  $N_i$  فانه بامكانه ان يشغل أي من المواقع  $g_i$  ما والكوننا اعتبرنا الجسيات متميزة في هذه المرحلة ، فان مجموع الطرق للتوزيع يساوي حاصل ضرب الحدود :

. . 
$$W_i = (N_i + g_i - 1)(N_i + g_i - 2) . . g_i = \frac{(N_i + g_i) - 1}{(g_i - 1)!}$$

ولكون الجسيمات غير متميزة ، فعلينا تقسيم الناتج على !Ni :

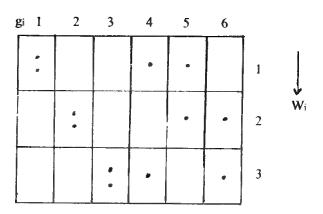
$$W_i = \frac{N_i + g_i - 1)!}{N_i (g_i - 1)!}$$

وعليه يكون مجموع الاحتالية الثرموداينميكية W تساوي حاصل ضرب حدود من أمثال Wi لجميع المجاميع (M) من خلايا فضاء الطور . أي ان :

مثال محلول (١) : يحتوي مستوى الطاقة (i) على ثلاثة خلايا (gi = 3) ومن جسيمتين (Ni = 2) احسب عدد التوزيعات الممكنة (Wi) .

$$W_i = \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i (g_i - 1)!} = \frac{(2 + 3 - 1)!}{2 (3 - 1)!} = 6$$

والشكل ٤ ـ ٢ يوضح التوزيع .



المخطط (٦ ـ ٢) ـ توزيع بوزونين بين ثلاثة خلايا بدون تحديد عددها في كل خلية طور (حالة طاقة)

مثال (٢) : احسب الاحتالية لمستوى يحتوي على خلية واحدة وغير متحللة (Non degenerate)

$$W_i = 1, g_i = 1$$
 :  $i = 1$ 

لأنه لا يوجد غير توزيع واحد :

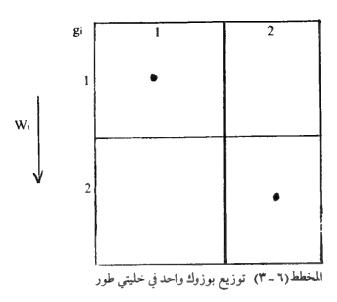
.. 
$$W_i = 1 = \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!(g_i - 1)!} - \frac{N_i!}{N_i!0!} = 1$$

$$\cdot \cdot \cdot 0! = 1$$

 $N_1 = 2, g_1 = 3$ مثال (۳) ، (۱) ، (۱) مثال : نظام يتكون من مستويين (۱) ، (۳) بحيث  $g_2 = 2, N_2 = 1$  والآخر  $g_2 = 2, N_2 = 1$  .  $W = W_1 \cdot W_2$ 

.. WB.E. = 
$$\frac{4!}{2! \cdot 2!} \times \frac{2!}{1! \cdot 1!} = 6 \times 2 = 12$$

أي ان هناك ١٢ طريقة مختلفة لتموزيع ٣ جسيات غير متميزة توزع بين حالات الطاقة (خلايا فضاء الطور) والمخططان (٦ - ٢) ، (٦ - ٣) يوضحان توزيع المجموعتين .



# (٦ - ٣) اشتقاق قانون توزيع (بوز ـ أينشتاين)

لفرض اشتقاق قانون التوزيع فانناكها فعلنا في احصاء (. M.B) نجد القيمة العظمى للاحتالية الثرموداينميكية . WB.E حيث :

$$W_{B.E.} = \prod_{i=1}^{M} \frac{(g_i + N_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \dots (\mathring{1})$$

وباستخدام معادلة ستيرلينج وأخذ لوغاريتم الطرفين ، نحصل (مع اهمال الوحدة لصغرها) فيكون :

$$Ln \ W = \ \sum \left(g_i + N_i\right) Ln \left(g_i + N_i\right) - N_i Ln N_i - g_i Ln g_i \quad \cdot \quad \cdot \quad \text{($\checkmark$)}$$

$$\beta \sum \epsilon_i dN_i = 0$$
 ,  $\alpha \sum dN_i = 0$  : ولكن

حيث β, α معاملي لاكرانج ، وبجمع المعادلتين الاخيرتين نحصل :

$$-L_n(N_i+g_i)+L_nN_i+\alpha+\beta\epsilon_i$$
 (2)

و باهمال الوحدة لصغرها مقارنة بالمقدار Ni · gi نحصل على :

$$\frac{N_i}{N_{i+g_i}} = EXP - (\beta \epsilon_i)$$

$$N_{i} = \frac{g_{i}}{e^{\alpha + \beta \epsilon_{i}} - 1} \qquad (Y - 7)$$

ففي الغاز الفوتوني  $\sum dNi$  لا تساوي الصفر لأن عدد الفوتونات غير ثابت لذلك فان  $\alpha=0$  (للغاز الفوتوني) :

.. 
$$N_i = \frac{g_i}{e^{\beta \epsilon_i} - 1}$$
 (Y-1)

: حيث eta لنظام من الفوتونات لها انتروبي قدره eta حيث

$$ds = k d Ln WB.E. = k \sum_{i} L_n (1 + \frac{g_i}{N_i}) dN_i$$

(راجع العلاقة جـ أعلاه)

ومن العلاقة (د) في حالة الاتزان يكون :

$$L_{n}(1 + \frac{g_{i}}{N_{i}}) = \beta \epsilon_{i} \qquad (\alpha = 0)$$

$$ds = k \sum \beta \epsilon_{i} dN_{i}$$

$$U = \sum_{i} \varepsilon_{i} dN_{i}$$
 . .  $dU = \sum_{i} \epsilon_{i} dN_{i}$  : . . .  $dS = k\beta dU$  . . .  $\beta k = (\frac{\partial s}{\partial U})^{v} = \frac{1}{T}$ 

$$...\beta = \frac{1}{kT}$$

وعليه فان دالة التوزيع لاحصاء . B.E لغاز الفوتونات تصبح :

$$N_1 = \frac{g_i}{\epsilon i / kT}$$

$$\frac{\epsilon i / kT}{e} = \frac{1}{1}$$

(B.E.) تطبیقات احصاء بوز ـ اینشتاین (B.E.)

# (أ) ـ الغاز الفوتوني :

لعلمه من اهم تطبيقات احصاء . B.E. هو في تحليل الاشعاع الكهر ومغناطيسية المحصورة في تجويف (Cavity) بحالة اتزان حراري بين الاشعاع وذرات مادة التجويف. ويسمى هذا الاشعاع باشعاع الجسم الأسود ، حيث ان ذرات الجدار تمتص وتشع الفوتونات حتى تحصل حالة الاتزان حينئذ تكون سرعة الامتصاص تساوي سرعة الانبعاث . ويكون لطينف هذا الاشعاع توزيع للطاقة بدرجة حرارة الاتزان للجسم الأسود ، وهي لا تعتمد على طبيعة مادته . وبما أن الاشعاعات الكهر ومغناطيسية تتصرف عند تفاعلها مع المادة كما لو كانت جسيات طاقتها (hf) حيث (f) تردد الاشعاع وزخمة ٨ / h او c / h حيث (A) طول موجته ، وسوف نفترض ان هذه الفوتونات المتزنة في التجويف تتصرف كغاز يخضع لاحصاء (B. E.) ونفترض انها لا تتفاعل مع بعضها بل تتأثر فقط بذرات الجدار .

وبما ان الفوتونات غير متميزة ، وان عددها غير ثابت ( $\int dN_i \neq 0$ ) فبامكان فوتون طاقته  $\int dN_i \neq 0$  الذرة من مستوى استقرارها ( $\int dN_i \neq 0$ ) بحيث انها بعودتها الى وضع استقرارها تبث عدداً من الفوتونات بطاقات  $\int dN_i \neq 0$  . . . الىخ . وضع استقرارها تبث عدداً من الفوتونات بطاقات الفوتونات المنبعثة :

$$hf = hf_1 + hf_2 + hf_3 + \dots$$
  $g_i$  : لذلك فان  $\alpha = 0$  وتصبح دالة التوزيع للفوتونات  $\alpha = 0$ 

$$N_{1} = \frac{g_{1}}{e\epsilon_{1}/kT - 1}$$

$$e\epsilon_{1}/kT - 1$$

ويمكن اعتبار طيف الفوتونات شبه متصل عندما تكون أبعاد التجويف كبيرة مقارنة بمعدل طول الموجة .

أي أن الفروقات في مستويات الطاقة  $d \in \mathbb{R}$  المسموح بها صغيرة مقارنة بقيمة الطاقة  $g(\epsilon)$   $d \in \mathbb{R}$  بالمقدار  $g(\epsilon)$  وتصبح المعادلة اعلاه بالصيغة :

$$dN_{i} = \frac{g(\epsilon) d\epsilon}{e^{\epsilon i / kT_{-1}}} \qquad (6-\xi)$$

$$\epsilon_{3} \qquad hf$$

$$\epsilon_{2} \qquad hf_{2}$$

$$\epsilon_{1} \qquad hf_{2}$$

المخطط (٦ - ٤) الفوتون الممتص يولد عدداً من الفوتونات المنبعثة

وبما أن  $\epsilon = hf$  لذلك يمكن التعويض عن المتغير (ع) بنظيره (f) وتصبح المعادلة الأخبرة بالصبغة :

$$(g\epsilon) d\epsilon = g'(f) df = \frac{8\pi V f^2 df}{c^3} \qquad \dots \qquad (7-7)$$

حيث g'(f) df عدد انماط الاهتزازات ضمن مدى التردد g'(f) df فاصلة الطاقة g'(f) ولقد ضوعفت قيمة الحد الأيمن لأن هناك اتجاهان مستقلان للاستقطاب ، لكون الأمواج الكهر ومغناطيسية مستعرضة . وعليه تصبح المعادلة

$$dN_i = \frac{8\pi V}{c^3} \cdot \frac{f^2 df}{c hf / KT - 1}$$
 : it is a property of the contraction o

فلو رمزنا الى طاقة الاشعاع الواقعة بين مدى التردد f+df,f يساوي U(f)df

U(f)df = dNihf df : حيث

$$u(f) = \frac{U(f)}{V}$$
 : قافة الطاقة الطيفية :

وهي تمثل كثافة الطاقة الاشعاعية لوحدة التردد:

... 
$$u(f) = (\frac{8\pi h}{c^3}) \frac{f^3}{e^2 h f / kT - 1}$$
 .... (V -  $^{3}$ )

وتسمى هذه النتيجة معادلة بلانك الاشعاعية :

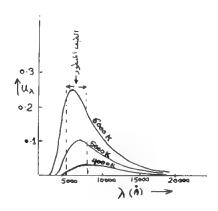
(Plank's Radiation Formula)

وان تطابق هذه المعادلة مع التجربة تؤيد صحة احصاء B.E. الفوتونات ولا بد ان نذكر الطالب بأن مشكلة اشعاع الجسم الأسود وتوزيع طاقته على الترددات المختلفة هي التي اوحت الى (بلانك) للافتراض بأنه متى تفاعلت الاشعاعات مع المادة فانها تُمتص او تُبث على شكل أكمام (Quanta) من الطاقة قدرها (hf) ولكن اشتقاق بلانك الأصلي للمعادلة أعلاه لم يكن دقيقاً ولأنه افترض ان طاقة اشعاع المذبذبات (الذرات) في جدار التجويف تعطي طاقة (hf) وليست (hf) الأكثر دقة ويث ان (hf) وبالرغم من صحتها الا انها تعطي نتائج غير كذلك فانه استخدم احصاء (hf) وبالرغم من صحتها الا انها تعطي نتائج غير دقيقة اذا ما استخدمت في دراسة الحرارة النوعية للجوامد كها أشرنا الى ذلك في الفصل السابق .

لو عَبَرنا عن التردد (f) بدلالة طول الموجة (λ) في معادلة بلانك لأصبحت المعادلة (ξ ـ ٧) بالصبغة :

$$u(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi hc \cdot \lambda^{-5} d\lambda}{\exp(hc / \lambda kT) - 1}$$

وهذه المعادلة تمثل بالمخطط ( $\mathbf{2}-\mathbf{0}$ ) فنلاحظ بأنه كلما ارتفعت درجة الحرارة فان طول الموجة ( $\mathbf{Am}$ ) للطاقة العظمى يقل ولا يجاد العلاقة بين ( $\mathbf{T}$ ), نفاضل المعادلة ولا سما المتغير : ( $\mathbf{E}$ ) ( $\mathbf{E}$ ) (exp ( $\mathbf{E}$ ) ( $\mathbf{E}$ ) المعادلة ولا سما المتغير : ( $\mathbf{E}$ ) ( $\mathbf{E}$ )

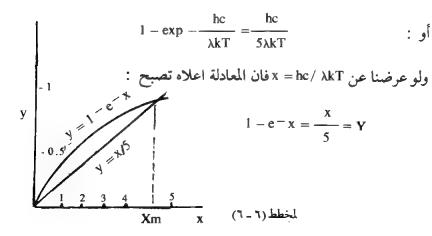


المخطط (٦ \_ ٥) تغير كثافة الطاقة الاشعاعية مع طول الموجة حسب معادلة بلانك

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \exp hc / \lambda kT \right) - 1 \right) = 0$$

 $\lambda m = \lambda$ 

5.  $\lambda^4$ . (exp hc/ $\lambda$  kT) - 1) +  $\lambda^5$ .exp  $\frac{hc}{\lambda kT}$  (- $\frac{hc}{\lambda^2 kT}$ ) = 0



وتحل المعادلة برسم منحنين للمعادلتين  $y=1-e^{-X},y=\chi$  وتمثل نقطة  $X_m = 4.96$ التقاطع ( $x_m$ ) حلاً لها ، حيث تكون قيمته ( $x_m$ )

$$X_m = \frac{hc}{\lambda_m kT} = 4.96$$

وبالتعويض عن قيم الثوابت c,h . . . . الخ نحصل على معادلة فين : . .  $\lambda_m T = 0.29 \, Cm \cdot K$ .

$$U(f) = \frac{8\pi h}{c^3} = \frac{f^3}{\text{Exp hf }/kT - 1}$$

ويكون مجموع كثافة الطاقة لجميع الترددات :

$$U = \int_{0}^{\infty} u(f) df = \frac{8\pi h}{c^3} \int \frac{f^3 df}{\exp hf / kT - 1}$$

ولو عرضنا عن hf / kT بالمتغير (x) فان المعادلة تصبح:

$$U = \frac{8\pi k^4 T^4}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e x - 1}$$

وعندما تقترب T من الصفر يكون مقدار التكامل يساوي T وعما ان الانبعاثية (Rb) للجسم الأسود والتي تمثل كمية الطاقة المنبعثة في الثانية من وحدة المساحة من سطحه تساوي :  $(\frac{cU}{L})$ 

... 
$$R_b = \frac{2 \pi^5 k^4}{15h^3 c^2} T^4 = \sigma T^4$$
 ....  $(9 - 7)$ 

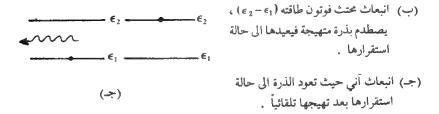
(ثابت ستيفان ـ بولتزمان)  $\sigma$  الثوابت نجد ان  $\sigma$ 

#### (د) الانبعاث المحفز ـ الليزر والميزر (Laser and Maser)

لو أخذنا مجموعة من الذرات المهاثلة والقادرة على الامتصاص والاشعاع عند التردد (f) ووضعناها في مجال لاشعاع الجسم الأسود تتبادل معه الفوتونات . فبإمكان الذرة أن تتهيج بامتصاص فوتون ، فتزداد طاقتها او تشع فوتون فتنقص طاقتها . وهذه الطاقة تأتي او تذهب الى مجال الاشعاع الموضوعة فيه ، وعند الاثزان يتساوى معدل الامتصاص مع الانبعاث . ولقد بين اينشتاين ثلاثة عمليات الشعاعية هي : (أ) الامتصاص المحتث (Induced absorption) . (ب) انبعاث أني (Spontaneous emission) كها في المخطط (٤ - ٧) .

المخطط (٦ ـ ٧) ثلاثة عمليات تتفاعل بها الفوتونات مع الذرات .

.  $\epsilon_2$  امتصاص الفوتون يرفع الذرة من مستوى طاقة  $\epsilon_1$  ألى  $\epsilon_2$  .



 $B_{12}\,N_1\,u(f)=$  ويكون المعدل الزمني لذرات الامتصاص المحتث  $B_{21}\,N_2\,u(f)$  : والمعدل الزمني لذرات الانبعاث المحتث يساوي

حيث  $N_2,N_1$  هو عدد الـذرات بطاقة  $\epsilon_2,\epsilon_1$  على التـوالي  $N_2,N_1$  معامـلاً اينشتاين للامتصاص والانبعاث .

أما المعدل الزمني لذرات الانبعاث فيساوي  $A_{21},N_{1}$  ، لأنه لا يعتمد على المحيط وانما يعتمد على تركيب الذرة وعدد الذرات بطاقة  $A_{21},\epsilon_{2}$  معامل اينشتاين للانبعاث الآنى .

ولكي يتم الاتزان ، فان المعدل الزمني للطاقة الممتصة يساوي المعدل الزمني . للطاقة المنبعثة :

..  $B_{21} N_2 u(f) + A_{21} N_2 = B_{12} N_1 u(f)$ 

$$u(f) = \frac{A_{21}/B_{21}}{\frac{B_{12}.N_1}{B_{21}.N_2} - 1}$$
 : just just in the contraction of the contraction

: نحصل  $\epsilon_2 - \epsilon_1 = \text{hf}$  نحصل :

$$\frac{N_1}{N_2} = e^{-\beta \epsilon_1 / e^{-\beta \epsilon_2}} = e^{\beta hf}$$

ولكي تتفق المعادلة اعلاه مع معادلة بلانك يجب ان تكون :

$$B_{12} = B_{21}$$
 ,  $A_{21} = \frac{8 \pi h f^3}{c^3}$  .  $B_{21}$ 

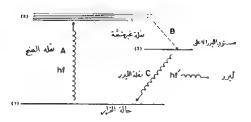
ومن الممكن حساب المعاملات الثلاث اعلاه بواسطة نظرية التكميم . ان التنافس بين الانبعاث والاشعاع يؤدي الى توزيع بلانك عندما تتوزع الذرات تبعاً لمعامل بولتزمان والتي تؤدي الى توزيع متزن للذرات . اما اذا كانت الذرات غير متزنة من الناحية الشرموداينميكية فان كثافة الاشعاع ستشذ عن قانون بلانك . وهذا الشذوذ في حالة الاتزان يكون موجود في عملية الليزر . والكلمة الأخيرة اختصار للعبارة . Light Amplification by stimulated Emission of Radiation .

أي تضخيم الضوء بالاشعاع المحفز . كذلك في حالة الليزر للأمواج Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation . : المايكروية ان جهاز الليزر يعطي ضوءاً كثيف الطاقة آحادي الموجة (تقريباً) ومتوازي (تقريباً) ومتشاكه (Coherent) أي أن أمواج الضوء المنبعثة من قبل الذرات الفردية تكون بنفس الطور .

وللحصول على عملية الليزر ، من الضروري خلق توزيع غير مترن للذرات ، حيث يكون الانبعاث المحفز يفوق الامتصاص والانبعاث الأني ، ففي الشكل (٦-٧) لو بدأنا بذرات تسكن مستوى الطاقة ٤ أكثر من تلك التي تسكن الشكل (١٠-٧) لو بدأنا بذرات تسكن مستوى الطاقة ٤ أكثر من تلك التي تسكن وهذان الفوتون المتحرر بالانبعاث الآني يحرر فوتوناً ثانياً بعملية الانبعاث المحفز الفوتونات يحفزان انبعاثات اخرى وسريعاً ما يتجمع سيل من هذه الفوتونات المتلازمة يداً بيد (نفس الطور) فتتضاعف سعة الموجة المنبعثة بعدد الفوتونات المتلازمة بدون أن تؤثر على ترددها . فاذا كان عدد الذرات التي تبث الاشعاع المحفز يساوي (١٨) فان سعة الموجة الناتجة للضوء المحفز يتضاعف بمقدار (١٨) . المحفز يساوي (١٨) فان سعة الموجة الناتجة للضوء المحفز يتضاعف بمقدار (١٨) . ايضاً . أما شدة الضوء الغير متشاكة فانه يتناسب مع (١٨) وعلى شدة الضوء الساقط .

إن عملية الامتصاص الكبيرة من قبل المرايا في الجهاز تودي الى خفض شدته ، ولتوليد الليزر نحتاج الى وسط نشط يحتوي على الذرات او الجزيئات التي تبث اشعاع الليزر مع بعض الذرات الاخرى التي تساعد على الانقلاب السكاني (Optical resonator) . توضع هذه الذرات في رَبَّان بصري (Population Inversion) وهو يتكون بأبسط اشكاله من مرآتين صقيلتين توضعان على طر في الانبوبة التي تحتوي على الوسط النشط (Active Medium) بمسافة تساوي مضاعفات انصاف طول الموجة وهي تمكن ضوء الليزر من الذهاب والإياب بين المرآتين بحيث تسمح لقرابة المراجة وهي النفوذ خلالها ، وهو الذي يشكل حصيلة ضوء الليزر الذي يغادر الجهاز .

ولقد تم صنع أول ليزر عام ١٩٦٠ من قبل (ميان) مستخدماً بلورة اسطوانية الشكل من الياقوت الأحمر (Ruby Crystal) طولها 3 سم وقطرها  $\frac{1}{7}$  سم .



المخطط ( ٦ ـ ٨ ) مستويات الطاقة الثلاثية ونقلاتها الى ليزر الياقوت ( المتقطع ) .

والياقوت الأحمر يتكون من اكسيد الألمنيوم فيه قليل من آيونات الكروم . والتي تعطي اللون الأحمر للبلورة . وتزود البلورة بطاقة التهيج (Pumping) من مصباح زينون المتقطع النبضات ، فيتولد الليزر على شكل ضوء أحمر طول موجته تقارب ٦٩٤٣ انكستروم على شكل نبضات أمدها ٥,٠ ملي ثانية .

ومن الاعتبارات المهمة في اختيار المادة الفعالة هو معرفة عمر مستوى الطاقة المتهيّج . فللانبعاث الآني يكون عمره يقارب  $^{*}$   $^{-}$  ثانية وللمستويات الشبه مستقرة (Metastable States) يكون عمرها يقارب  $^{*}$  ملي ثانية ثما يساعد على الانقلاب السكاني . ففي الشكل ( $^{*}$   $^{-}$   $^{*}$  ) يمثل عمل ليزر الياقوت . حيث تمثل العملية ( $^{*}$   $^{-}$  ) عملية ضخ الطاقة (تهيّج آيون الكروم) بمقدار ( $^{*}$   $^{-}$   $^{*}$ ) وعملية العبودة الغير اشعاعية (Non Radiative Transition) تمثيل ( $^{*}$   $^{*}$  ) فتكون العبودة بضياع الطاقة (حرارة في البلورة) قدرها ( $^{*}$   $^{-}$   $^{*}$ ) اما البث بالهبوط من المستوى الشبه مستقر ( $^{*}$ ) الى المستوى الأول (القرار) فيؤ دي الى ضوء الليزر بطاقة المستوى الشبه مستقر ( $^{*}$ ) الى المستوى الأول (القرار) فيؤ دي الى ضوء الليزر بطاقة ( $^{*}$   $^{*}$   $^{*}$   $^{*}$   $^{*}$  وهناك عملية أكثر كفاءة تسمى عملية المستويات الثلاثة (Three levels Scheme) ، حيث يكون المستوى الرابع يحل محل مستوى القرار بالنسبة لنقله الليزر ، فالذرات قبل عملية الضخ تكون مستويات الليزر فارغة تقريباً مقارنة بمستوى القرار (Ground State) . ولكنه بسبب دالة بولتزمان الأسسية ، فان عملية ضغيرة تكفي للحصول على الانقلاب السكاني .

ان العملية الأخيرة تمكننا من الحصول على ليزر متصل البث . ومن الشائع في المختبرات العلمية هو الليزر الذي تتكوّن مادته النشطة من غازي الهيليوم والنيون (He - Ne Laser) يعطي ضوءاً بموجة ٣٦٢٨ انكستروم تقريباً . ويقوم الهيليوم بعملية الضخ (المخطط ٦ – ٩) .

وهناك تقدم سريع في وسائل توليد واستخدام الليزر في المواصلات والتوجيه والصناعة والطب لا مجال لذكرها .



المخطط (٦ - ٩) ـ نموذج لأربعة مستويات الطاقة في ليزرHe - Ne

#### (Fermi - Dirac Statistics) احصاء فيرمى ـ دايراك (Fermi - Dirac Statistics)

يطبق احصاء فيرمي ـ دايراك على الجسيات الغير متميزة والتي تخضع لقانون الاستثناء لباولي كما ذكرنا في بداية هذا الفصل ، حيث ينص هذا القانون على انه لا يجوز لأكثر من جسيمة واحدة من أشغال أية حالة طاقة .

لذلك فان عدد الجسيات (Ni) الممسوحة في أي مستوى طاقة لا يتجاوز عدد الخلايا (gi) في ذلك المستوى (gi > Ni) .

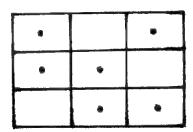
فلو اخذنا عدداً من الجسيات المتميزة وغمثلها بالحروف c.b,a فان هناك  $g_i$  من المواقع للجسيم ( $g_i$  -  $g_i$ ) مكاناً للجسيم الآخر ( $g_i$  -  $g_i$ ) موقعاً للجسيم ( $g_i$  -  $g_i$ ) . . . و ( $g_i$  - ( $g_i$ ) موقعاً للجسيم الأخير .

 $g_{i}$  لذلك فان عدد الطرق التي تكون فيها مسلسلة من  $N_{i}$  حرف محصمة الى الذلك فان عدد الطرق التي تكون فيها مسلسلة من المواقع (الخلايا) تساوي :  $g_{i}(g_{i}-1) \dots g_{i}-(N_{i}-1) = \frac{g_{i}!}{(g_{i}-N_{i})!}$ 

وبما ان الجسيات في احصاء . F.D غير متميزة لذلك يجب قسمة النتيجة على Nil وبذلك نحصل على :

$$W_{i} = \frac{g_{i}!}{N_{i}! (g_{i}-N_{i})!}$$

فمثلاً لو فرضنا عند المستوى (J) هناك ثلاثة خلايا ( $g_i = 3$ ) وجسيمتين ( $N_i = 2$ ) فان  $W_i = 3$  فان  $W_i = 3$  فان  $W_i = 3$  المحطط ( $W_i = 3$ ) . ولإيجاد مجموع الطرق المختلفة المتميزة للتوزيعات .



المخطط (٦ ـ ١٠) توزيع جسيمتين متاثلتين بين ثلاثة خلايا لا تشغل الخلية اكثر من جسيمة واحدة

الطاقة  $\epsilon_3, \epsilon_2, \epsilon_1$  نضرب الحدود الماثلة للحد  $N_3, N_2, N_1$  من بين مستويات الطاقة  $\epsilon_3, \epsilon_2, \epsilon_1$  نضرب الحدود الماثلة للحد اعلاء لكل مستوى طاقة متيسر فنحصل على الاحتالية الثرموداينميكية (WF-D) حسب توزيع فيرمي ـ دايراك .

$$W_{F,D} = \prod_{i=1}^{N} \frac{g_{i}!}{1 - N_{i}!(g_{i} - N_{i})!} \dots (1, -1)$$

ولاشتقاق دالة التوزيع ، نستخدم نفس الأسس التي طبقت لاشتقاق دالة توزيع . M.B.E. أي نجد قيمة :

$$\sum \varepsilon_i dN_i = 0$$
 ,  $\sum dN_i = 0$  ,  $d$  In Wf.D. =  $0$ 

وباستخدام تقريب ستيرلينج (Lnx! = x Lnx - x) تصبح المعادلة

 $\ln W_{F,D} = \sum \left[ \left[ g_i \ln g_i - N_i \ln N_i - (g_i - N_i) \ln (g_i - N_i) \right] ... (1 - 7) \right]$ 

- . . - d In  $W_{F,D}$  =  $\sum \left[ ln N_i - ln \left( g_i - N_i \right) \right] d N_i = 0$ 

: وباستخدام معاملي لاكرانج  $\alpha, \beta$  وجمع المعادلات اعلاه نحصل  $ln N_i - ln (g_i - N_i) + \alpha + \beta \varepsilon_i = 0$ 

$$N_{i} = \frac{g_{i}}{e^{\alpha + \beta \epsilon_{i}} + 1} \qquad (11 - 7)$$

 $(\alpha)$ وهي تمثل دالة  $\beta=1/k$  الجمية على ان  $\beta=1/k$  أما الكمية وهي تمثل دالة . فهي تُعَين تحت شرط N = N وفي اغلب الأحيان تكون سالبة وتعرف بالكمية، والمسياة طاقة فبرمي (Fermi Energy) حيث:

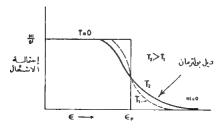
$$\epsilon F = \pm \alpha kT$$
 .... (\Y-\T)

ويعوّض احياناً عن،€ بالجهد الكيميائي (١) في درجات الحرارة فوق الصفر المطلق ، لذلك فالمعادلة ٦ ـ ١١ تصبح : gi

.. 
$$N_i = \frac{g_i}{e(\epsilon_i - \epsilon_F) kT + 1}$$
 ... (\\T-\)

وتلعب هذه الدالة دوراً هاماً في نظرية الالكترونات في المعادن . ويمكن تمثيل الدالة (٦ - ١٣) بالمخطط (٦ - ١١)، حيث تمثل الدالة (٦ - ١١) بالمخطط (١٠ - ١١)، عند الطاقة ، تكون مشغولة بالفرميونات وهي تسمى احتالية الأشغال (Occupation Probability) فقرب الصفر المطلّق ( $eta \to \infty$ , T  $\to 0$ ) تحصل الحالتين

فإما:



المخطط (١١ ـ ١١) (F-D) توزيع احتالية الأشغال كدالة للطاقة في إحصاء

الدالة  $\frac{N_i}{g_i} \to \frac{1}{2}$  أي  $\frac{N_i}{g_i} \to \frac{1}{2}$  وذلك عندما تكون  $\epsilon$  أقل من  $\epsilon$  . او تصبح الدالة ( $\epsilon$ ) عندما  $\epsilon$  أكبر من  $\epsilon$  (حينتُذن  $\epsilon$ ) فالشكل ( $\epsilon$  . (1) يبين ان الالكتر ونات  $\epsilon$  أكبر من  $\epsilon$  قيمة للطاقة طبقاً لقانون باولى .

# (٦ - ٦) توزيع طاقة الغاز الألكتروني:

لتعيين طاقة فيرمي (ع) نستخدم الشرط التالي : وهو مجموع الالكترونات يساوي مجموع خلايا فضاء الطور (gi = Ni) والتي طاقتها لا تزيد على (ei) . ففي احصاء التكميم يفضل استخدام احداثيات الزخم (P) واحداثيات الموقع بدلاً من احداثيات السرع والموقع في فضاء الطور .

وبما ان توزيع فيرمي متناظر في فضاء الزخم لذلك نستخدم فراغ الزخم الكروي الذي نصف قطره ا(P) فيكون حجم خلايا فضاء الطور في قشرة كروية ممكها  $d^3rd^3p = 8\pi p^2\,dpV$  تساوي (p+dp,p)  $d^3rd^3p = 8\pi p^2\,dpV$ 

حيث ضوعفت الكمية بسبب احتواء الالكترون على نوعين من الفتل (البرم) الى الأعلى او الى الأسفل طبقاً لقانون (باولي)، V حجم المعدن. و بما ان حجم الخلية  $dg = 8\pi p^2 dp \ V/h^3$  :  $h^3$  لذلك فان :

$$ext{ef} = \frac{P^2_f}{2m}$$
 ، ولكن  $\epsilon = P^2 / 2m$  ولكن  $\epsilon = P^2 / 2m$ 

.'. 
$$g = \frac{8\pi V}{h^3} \int_{0}^{pF} p^2 dp = \frac{8\pi V}{3h^3} (2m \epsilon_f) / 2$$

ولكن g=N ولكن ونات الحرة  $n=\frac{N}{V} \qquad g=N$  في المعدن) .

$$\therefore \epsilon F = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3n}{8\pi} \right)^2 \% \qquad \cdots \qquad (1\xi - 1)$$

فالجدول (٦ ـ ١) يعطى قيمة ٤٠ لعدد من الفلزات .

ويمكن الوصول الى نفس النتيجة بتكامل المعادلة (m - m) من صفر الى  $\frac{e_f}{g(\epsilon)}$  مع التعويض عن  $\frac{e_f}{g(\epsilon)}$  بالمقدار  $\frac{N}{2}$  طبقاً لقانون باولي . ولحساب متوسط الطاقة  $\overline{\epsilon}$  نستخدم العلاقة المألوفة :

F(e.v.)	T <sub>F</sub> (k) × 10 <sup>4</sup>	المعدن
4.72	5.5	Li
3.12	3.7	Na
2.14	2.4	K
7.04	8.2	Cu
5.51	6.4	Ag
1		

الجدول (٦ - ١) طاقة ودرجة حرارة فيرمى لبعض المعادن

$$\frac{-}{\epsilon} = \frac{1}{\dot{N}} \int \epsilon i dN i$$

$$dg = \frac{4 \pi V}{h^3} (2m)^3 /_2 \epsilon^1 /_2 d\epsilon \qquad :$$
 ولكن :

$$\overline{\epsilon} = \mathbf{p}^2 / 2\mathbf{m} \cdot \int_0^{\epsilon} d\mathbf{g}_i = \mathbf{N}$$
 :  $5$ 

$$\overline{\epsilon} = \int_{0}^{\epsilon F} \epsilon^{3} V_{2} d\epsilon / \int_{0}^{\epsilon F} \epsilon^{1} V_{2} d\epsilon \qquad : \text{ it it is } \epsilon^{1} V_{2} d\epsilon$$

$$\dots \epsilon^{-} = {}^{3}V_{c} \epsilon_{F} \qquad \dots (10-7)$$

فللموصـــلات الجيدة € تســـاوي بضعــة ( . e. v . ] . ف) ، أي ان الالكترون يسير بسرعة تتجاوز الف مرة سرعة الصوت حتى عند الصفر المطلق!! ويمكن وضع المعادلة (٦ ـ ١٣) بالصيغة التفاضلية :

$$dN(\epsilon) = \frac{dg}{Exp(\epsilon - \epsilon F) / kT + 1}$$

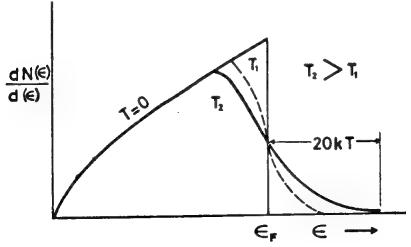
$$= \frac{8\pi V (2m^3) \cancel{2}}{h^3} \cdot \frac{\epsilon \cancel{2} d\epsilon}{(\exp(\epsilon - \epsilon_F) / kT + 1)}$$

.... (17-7)

$$\frac{dN(\epsilon)}{d\epsilon} = \frac{8\pi V(2m^3)V_2}{h^3} \frac{\epsilon V_2}{(\exp(\epsilon - \epsilon F) / kT + 1)}$$

والمعادلة الأخيرة تمثل معادلة فيرمي ـ دايراك لتوزيع طاقة الالكترونات الحرة . وعموماً تصح للفرميونات الحرة . . وهي تمثل في المخطط (٦-١٢) وتكون طاقة الحالات التي تشغلها الالكترونات المتهيجة (المشارة) تتجاوز ( $\epsilon$ F) بحدود ( $\epsilon$ COkT) فمن الجدول ( $\epsilon$ CNT) نجد طاقة فيرمي تزيد كشيراً على الطاقة الخاز بدرجة حرارة الغرفة (والتي تقارب  $\epsilon$ CNT) . و . إ . ف ) .

ولحساب درجة حرارة (TF) الغاز الذي يمتلك طاقة فيرمي نستخدم العلاقة:



حيث TF تسمى درجة حرارة فيرمي ، وباستخدام حجم مولي للنحاس قدره ٧,٧ سم ٣ وعلى فرض انه يحتوي الكترون حر لكل ذرتين ، فيكون عددها في المول الواحد يقارب ٣ × ٢٠١٠ وتكون TF تساوي ٥ × ١٠ ك !

أي ان الالكترون الحر عند الصفر المطلق في المعدل له طاقة غاز بدرجة حرارة ٥ × ١٠ ك، وتسمى هذه الطاقة بطاقة الصفر المطلق للغاز الالكتروني .

# (٦-٧) الحرارة النوعية للالكتر ونات الحرة في المعدن:

عندما يسخن المعدن الى درجة حرارة T فان الالكترونات التي طاقتها قرب  $\epsilon_F$  ترتفع الى حالات عليا من الطاقة ، ولحساب تأثير طاقة هذه الالكترونات الحرة على الحرارة النوعية للمعدن (co) نستخدم احضاء (F. D.) .

ولا يجاد الطاقة الداخلية (U) للالكتر ونات نستخدم العلاقة :

$$U = \int_{0}^{\infty} \frac{g(\epsilon) d\epsilon}{e(\epsilon - \epsilon F) / kT + 1}$$

$$g(\epsilon) d\epsilon = 4\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \epsilon^{1/2} d\epsilon$$
 3 / 2: ولكن  $\frac{3}{2}$ 

وباستخدام المعادلة (٦ - ١٤) مع المعادلة الأخيرة يكون :

$$g(\epsilon) d\epsilon = \frac{3N \epsilon^{1}/_{2} d\epsilon}{2 \epsilon F^{3}/_{2}}$$

.. 
$$U = \frac{3N}{2\epsilon_{F}^{3}/_{2}} . \int_{0}^{\infty} \frac{\epsilon^{1}/_{2} d\epsilon}{\exp(\epsilon - \epsilon_{F})/kT + 1}$$

ان تكامل المعادلة الأخيرة صعب للغاية ، ولكن تكاملها ممكن تحت ظروف خاصة ، فمثلاً عندما تكون  $\frac{T}{T_F}$  صغيرة (في درجات الحرارة الواطئة) فيمكن تكاملها على شكل متوالية ، وبأخذ الحدين الأولين فقط من المتوالية نحصل :

$$U = \frac{3No}{5} \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT^2}{\epsilon F} \right) + \dots \right]$$

حيث Noer هو متوسط الطاقة عند الصفر المطلق للمول الواحد من الالكترونات :

$$C_e = (\frac{\partial u}{\partial T})v = Nok \frac{\pi^2}{2} \frac{kT}{\epsilon F} + (T << T_F) : \int_{\epsilon}^{\epsilon} C_e = \alpha T \cdot ... \cdot (N - T)$$

حيث α ثابت لذلك المعدن ، فيكون تأثير طاقة الالكترونات مهمة في المعدن في درجات الحرارة الواطئة عند منطقة قانون (ديباي) وعليه فان (Cv) للجامد الموصل يمكن التعبير عنها بالمعادلة :

$$\frac{C_{v}}{3R} = 77.9 \ (\frac{T}{\Theta D})^{3} + \frac{\pi^{2}}{6} \ (\frac{T}{T_{F}}) \dots \ (14-7)$$

مثال محلول:

احسب ضغط الغاز الالكتروني (Pe) داخل قطعة من معدن عند درجة حرارة الصفر المطلق .

$$P = -\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_s$$

ولكن عند T = 0 (راجع الفقرة الأخيرة) :

$$u = \frac{3N}{5}$$

$$P_{e} = -\frac{3N}{5} \left( \frac{\partial \epsilon F}{\partial v} \right)$$

$$\epsilon F = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3}{8\pi}\right)^2 /_3 \cdot \left(\frac{N}{m}\right)^2 /_3$$
: etc.:

... Ln 
$$\epsilon F = -\frac{2}{3} L_n V + C$$

$$\cdot \cdot \frac{\epsilon_{Fn} \epsilon_F}{\partial V} = \frac{2}{3} \frac{\epsilon F}{V}$$

.. 
$$Pe = \frac{2}{5} \frac{N}{V} \epsilon F = \frac{16\pi}{15} (\frac{2m}{h^2})^{3}/_{2} \epsilon^{5}/_{2}$$

فمن الجدول (٦ - ١) مثلاً نجد (٤٠) للنحاس تقارب (٧) إ . ف . وعند نمن الجدول (٦ - ١) مثلاً نجد أن تعويض عن قيمتها (بالارغ) ، m كتلة الالكترون (h) ثابت بلانك نجد أن  $P_{\rm e}=4\times10^{\rm s}$  atmosphere

وبالرغم من هذا الضغط الهائل الا انه الالكترونات لا تهرب من المعدن بسبب حاجز الجهد عند السطح .

# (٦ - ٨) الغاز المثالي في احصاء التكميم:

ان جميع الجسيات تخضع اما لاحصاء . F .D أو . B .E لذلك حتى الغاز المثالي يجب تحليله من وجهة نظر احصاء التكميم .

فلو فرضنا على سبيل المثال ، بأن الغاز المثالي يخضع لاحصاء B.E. وهمي الحالة الأكثر شيوعاً ، لأن الجزيئات تمتلك فتل اما صفر او الوحدة من (ħ) فيكون عدد الجسمات بين الطاقتين  $\epsilon + d.\epsilon$  يساوي :

$$dN(\epsilon) = 4\pi V \left( \frac{2m^3}{h^3} \right) V_2 \frac{\epsilon^1 V_2 d\epsilon}{e^{\alpha + \epsilon / kT} - 1}$$

$$\frac{V}{h^3}$$
 (2 $\pi$ mkT) $^3/_2$ : فلنضع  $x = \frac{kT}{\epsilon}$  ولكن Z للغاز المثالي تساوي

$$N = \frac{2Z}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \frac{x^{1/2} dx}{e^{\alpha + x} - 1}$$

: وبما ان  $\alpha$  موجب في احصاء . B .E . وباستخدام نظرية ذات الحدين تكون  $(e^{\alpha}+x_{-1})^{-1}\approx e^{-\alpha}(e^{-x}+e^{-\alpha-2x}t...)$ 

وبالتعويض والتكامل للمعادلة الأخيرة نحصل :

$$N = Ze^{-\alpha} (1 + \frac{1}{2^{3/2}} e^{-\alpha} + \dots)$$

وكتقريب اولي نضع  $\alpha = \frac{N}{Z}$  ثم نقوم بتقريب ثاني ، لنحصل :

$$e^{-\alpha} = \frac{N}{Z} (1 + \frac{1}{2^{3}/2} e^{-\alpha} + \ldots)^{-1} \approx \frac{N}{Z} (1 - \frac{1}{2^{3}/2} \frac{N}{Z} + \ldots)$$

$$U = \int_{0}^{\infty} \epsilon dN(\epsilon) = \frac{2 Z kT}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{X \cdot dx}{\epsilon \alpha + x_{-1}}$$

$$\approx \frac{3 \text{ k T Z}}{2} e^{-\alpha (1 + \frac{1}{2^5/2} e^{-\alpha} + \dots)}$$

 $e^{-\alpha}$  نحصل  $e^{-\alpha}$  نحصل

$$U = \frac{3NkT}{2} (1 - \frac{1}{2^{5}} / \frac{N}{Z} + \dots) \qquad (Y, -1)$$

$$P = -(-\frac{\partial u}{\partial v})_{T} = -Ni(\frac{d\epsilon_{i}}{dv})_{s} \qquad : \text{  $\dot{U}$  be in } = \frac{\pi^{2}\hbar^{2} n^{2}}{2m} V^{-2} / 3 \qquad : \text{  $\dot{U}$  be in } V = -\frac{2}{3} / \frac{\epsilon_{i}}{V}$$

$$P = \frac{2}{3} \sum \frac{V(\epsilon)}{V} = \frac{2}{3} \frac{U}{V}$$
  
: نجد (۲۰ ـ ۱) نجد  $U$  نجد  $U$  نجد  $U$ 

.. 
$$P = \frac{NkT}{V} (1 - \frac{1}{2^{5}/_{2}} \cdot \frac{N}{V})$$
 .... (Y1 - 7)

أي ان تأثيرات التكميم في احصاء . B.E تودي الى تقليل الضغط والطاقة الداخلية لغاز . M.B المثالي .

اما بالنسبة لغاز . D. فلقد سبق واشتققنا الضغط والطاقة الداخلية عند الصفر المطلق ، اما في درجات الحرارة العالية جداً (حيث موجبة) فان الاشارة السالبة في المعادلة (7 - 77) تصبح موجبة . اما في درجات الحرارة الواطئة (6 - 77) بزداد عن قيمته في الصفر المطلق .

# التحلل في الاحصاءات المختلفة (عدم التحلل في الاحصاءات المختلفة (Degenerate and Nondegenerate State)

لعرفة كون التوزيع متحللاً او عدمه ، يجب حساب الجهد الكيميائي  $\mu$  وهو يساوي  $\epsilon = \mu / \epsilon$  تقريباً ، راجع السؤ ال  $\mu$  ) ومن ثم حساب  $\mu$  ولكن :

$$N=\int dN_i= Exp\ \mu\ /\ kT$$
 .  $d\ g_i Exp-\epsilon_i\ /\ kT$  
$$dg_i=4\ \pi\ V\ P_i^2\ dp_i/h^3\ , \epsilon_i= \frac{p_i^2}{2m}$$
 : ولكن

$$e^{-\mu}/kT = \frac{(2\pi \, mkT)^{3/2}}{h^3} = \frac{V}{N}$$
 : وبالتعویض نحصل

ويمكن البرهنة ان وحدات الحد الأيمن لها وحدات معدل عدد خلايا فضاء الطور لكل جسيمة . وهو بذلك يتناسب مع $e^-\mu/kT$  لذلك فللاحصاء التقليدي يكون  $e^-\mu/kT$  أي ان خلايا الطور متوفرة للجزيئات ، ولتوضيح ذلك نأخذ المثالي التالي : –

مثال محلول : ـ

: التقريبية للكمية  $e^{-\mu} / kT$  التقريبية للكمية التقريبية للكمية

أ \_ جزيئات النايتر وجين تحت الظروف الاعتيادية .

ب ـ سائل الهيليوم عند درجة غليانه .

ج \_ الكترونات في البلازما تحت الظروف الاعتيادية .

الحل:

أ \_ لجزيئات النايتروجين :

 $m_{N_{\star}} = \, 5 \times 10^{\,-23} \, \text{gm}$  , T = 300 k

$$h^{3} = 2 \times 10^{-79} \, e \mid g.sec., \frac{V}{N} \approx 4 \times 10^{-20} / Cm^{3}$$

 $e^-\mu/kT \approx 10^7$ 

لذلك يصح احصاء . M .B على الهواء الذي نستنشقه .

 $T=4.2\,K$  ,  $m_{He}\approx 6\times 10^{-24}\,\text{gm}$ : ب لسائل الهيليوم

 $\therefore \frac{V}{N} \approx 5 \times 10^{-23} / \text{ Cm}^3 \quad \rho = 0.12 \text{ gm} / \text{ cm}^3$ 

 $\therefore e^{-\mu/kT} \approx 1$ 

لذلك فان الاحصاء التقليدي لا يصح على سائل الهيليوم بسبب ظهور تأثيرات التحلل التكميمي (Quantum Degeneracy) عند نقطة الغليان .

ج .. اما بالنسبة للالكترونات تحت ظروف البلازما في المختبر ، فان :

$$T\approx 10^3 \text{K} \quad , \quad \text{me} = 10^{-27} \, \text{gm} \ ., \ \frac{N}{V} \approx 10^{12} \label{eq:T_energy}$$

 $e^{-\mu}/kT \approx 10^8$ 

أي ان التأثيرات التكميمية مهملة.

### (١٠-٦) نموذج الالكتر ونات الحرة في المعادن :

(Free electron model in metals)

لقد بينا في الفصل الثاني بأن النظرية الحركية للغازات لا تفسر التوصيل الحراري والكهربائي للمعادن بصورة ناجحة ، ولكن احصاء .F.D. على الالكترونات يفسر هاتين الظاهرتين بنجاح ، وكها بينًا ، فانه فسر ايضاً تأثير طاقة الالكترونات على الحرارة النوعية للمعدن ، ولا سيا قرب الصفر المطلق حيث تتوقف الحركة الاهتزازية لذرات المعدن وتصبح الحركة الالكترونية هي المول الوحيد للحرارة النوعية للمعدن .

ان حركة الالكترونات داخل المواد الصلبة تحت تأثير الجهد الموجب للشبكة البلورية ، هي تلك الحركة المقننة التي نحصل عليها بحل معادلة شرودنكر ، كما ذكرنا في الفصل الثالث . ونتيجة لهذه الحسابات نجد ان مستويات الطاقة المقننة  $d\epsilon = E_{\frac{1}{1}} E_{1} << kT$  في القيمة أي  $d\epsilon = E_{\frac{1}{1}} E_{1} << kT$  المكممة) المتاحة لهذه الألكترونات متقارنة جداً في القيمة أي  $\epsilon = E_{\frac{1}{1}} E_{1} << kT$  المنافق عكن معه اعتبار الطاقة (ع) للالكترونات دالة متصلة ، فلو رسمنا العلاقة بين والعدد الموجي (  $\epsilon = \frac{2\pi}{\lambda}$  ) للالكترون الحر لحصلنا على الشكل العلاقة بين والعدد الموجي (  $\epsilon = \frac{2\pi}{\lambda}$  ) .

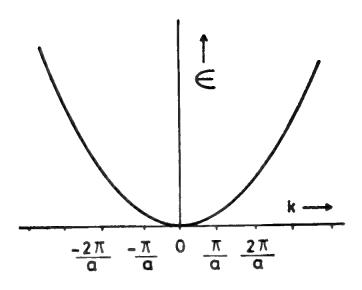
$$\epsilon = \frac{p^2}{2me} = \frac{\hbar^2 k^2}{2me}$$
 : :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = n \frac{\pi}{n} \quad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

٨ هو طول موجة الالكترون الواقفة في بلورة المعدن التي تكون الفواصل بين ذراته
 (a) .

$$\lambda = 2a$$
 : حيث

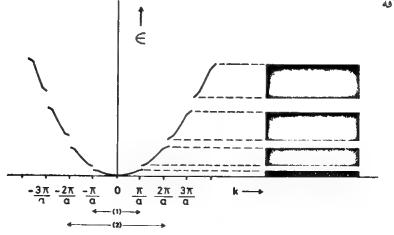
والحقيقة ان طاقة الالكترون في المعدن لا تكون متصلة (حرة) دائماً بسبب الطاقة الكامنة لايونات المشبك البلوري . فتنتج عنه مناطق منفصلة لقيم k عند المناطق :



المخطط (٦ - ١٣ أ) - طاقة الألكترون الحر دالة متصلة

$$k = n - \frac{\pi}{a}$$

حيث : ... وتحصل فجوات  $n=\pm 1\pm 2\pm 3$  ... : حيث : الطاقة (Energy Gaps) وما عدا هذه الفجوات فان الالكترونات في المشبك تتحرك بطلاقة



المخطط (٦ ـ ١٣ ب) - طاقة الالكترون في البلورة دالة متقطعة الى K . . ( لاحظمناطق بريلون ٢٠١ )

ان التوصيل الكهربائي والحراري في المعادن مصدره الكترونات التوصيل (Conduction Electrons) . وهذه اصلاً هي الكترونات التكافوء في ذرات المعادن والتي اصبحت الكترونات مشاعة ، أي لا تَمُت لذرة معينة ، وتكون غازاً الكترونياً متحللاً ذو درجة تحلل كبيرة ، ويسمى غاز فيرمي (Fermi gas) لأنه يخضع لاحصاء . F. D

فبالرغم من وجود تفاعل بين الغاز الالكتروني والشبكة الأيونية الموجبة في بلورة الجسم المعدني ، وكذلك يوجد تفاعل آخر بين الكترونات التوصيل نفسها ، إلا أن هذه التفاعلات ضئيلة الى درجة يمكن اهمالها ، وبالتالي يمكن اعتبار غاز فيرمي ، غاز حر ، أي غاز مثالي ، ونعلل هذا القول كما يلي :

من المعروف ان كل المعادن في درجات الحرارة الواطئة القريبة من الصفر المطلق ، لها معامل توصيل كهربائي عالي القيمة ، أي أن جميع المعادن تصبح موصلات مفرطة (Super Conductors) للكهربائية ، وذلك يعني ان الكترونات التوصيل تنساب حرة مطلقة بدون ادنى مقاومة داخل المعدن عند درجات الحرارة الواطئة القريبة من الصفر المطلق . وتعمل الشبكة الأيونية الموجبة في بلورات المعدن على فصل الكترونات التوصيل جزيئاً عن بعضها ، أي تعمل على تقليل مقدار التفاعل (Interaction) بين هذه الالكترونات بمقدار يكن اهاله . فلقد ذكرنا في الفصل الثالث أن جميع مستويات الطاقة المتاحة لالكترونات التوصيل داخل المعدن عند درجة الصفر المطلق مشغولة تماماً من اوطيء مستوى طاقة وحتى مستوى طاقة فيرمى ، وكها ذكر فان ٤٠ لأغلب المعادن تقارب ٥٠ لا . ف ) .

فلو فرضنا وقوع تفاعل بين الكترونين داخل المعدن عند درجة الصفر المطلق ولتكن (i),(i) هما حالتا التكميم للالكترون قبل التفاعل . فبعد التفاعل المزعوم يتشتت الالكترون ان الى حالتي التكميم (i) ، (i') .

ولكن جميع حالات التكميم ('J',i) والتي يمكن ان يتشتت اليهم الالكترون بعد التفاعل مشغولة تماماً ، وحسب قاعدة الاستثناء لباولي

(Pauli Exclusion Principle) نستنتج من ذلك استحالـة حدوث ذلك التفاعـل ، ويفسر صحة نموذج الالكترونات الحرة في المعادن .

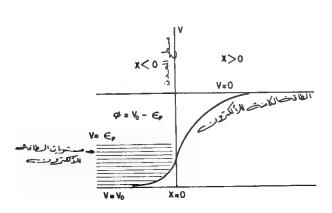
#### (٦ - ١١) - ظاهرة الانبعاث الالكتروني الحراري

(Thermoionic Emission)

عند تسخين أي معدن وجد ان بعض الالكترونات تستطيع الهروب من داخل المعدن الى الخارج خلال السطح المعدني . وتسمى هذه الظاهرة بظاهرة الانبعاث الالكتروني الحراري ، ولقد سبق وطبقنا الاحصاء التقليدي على الالكترونات على فرض انها غاز مثالي ، ولكن النتيجة كانت مغايرة للواقع ، وسوف نطبق نموذج الالكترونات الحرة في المعدن باعتبارها غاز فيرمي .

ان الكترونات التوصيل هذه تتحرك داخل المعدن في مجال جهد ثابت . اما اذا اقتربت من سطح المعدن الداخلي فانها تقع تحت تأثير قوة جذب كبيرة تعيدها الى داخل المعدن . وهذه القوة الجاذبة تتعادل مع الضغط الالكتروني (الهائل المقدار كها بيّنا في المثال المحلول) داخل المعدن بعيداً عن السطح الداخلي ، أي ان طاقة الجهد تزداد فجأة وبشدة اذا اقتربت الالكترونات من سطح المعدن من الداخل ، ثم تثبت ثانية خارج المعدن ، ويمثل الرسم البياني (٦-١٤) هذه التغيرات في طاقة الجهد داخل وخارج المعدن .

وبما ان الالكترونات حرة داخل المعدن (بالفرض) فان :



المخطط (٦-١٤) طاقة الكهد الكهربائي للألكترون داخل وخارج المعدن ( المجال الخارجي صفر )

$$\frac{p^{2}}{2m} = \frac{P^{2}x + P^{2}y + P^{2}}{2m}$$

حيث (P) هو زخمها الخطي . فالالكترونات التي تنجح بالهروب من المعدل خلال السطح (x = 0) نتيجة تسخين المعدن هي تلك التي لها مركبة زخم Px بحيا :

$$P_x \ge (2mV_0)^{1}$$
  $\frac{P^2x}{2m} \ge V_0$  : نام

حيث  $(V_0)$  هو عمق البئر الجهدي الناتج عن الشبكة الآيونية الموجبة ، وحينئذ سوف تتغلب الألكترونات (تتسلق البئر) على قوة الجذب الداخلية . اما مركبات الزخم الأخرى Pz,Py فلها ان تأخذ اية قيمة  $(\infty \ \ ^\pm)$  . ففي الوسط الموصل المتجانس توجد علاقة بين متوسط كثافة التيار الكهربائي  $\overline{V}$  ومتوسط سرعة انجراف الشحنات في نفس الاتجاه  $\overline{V}$  حيث :

$$\overline{J}_x = ne \;.\;\; \overline{V}_x$$

(n) الكثافة العددية للشحنات في الوسط .

وبما ان الكترونات التوصيل متوزعة الى حالات التكميم (i)

$$. . \epsilon_i = \frac{P^2 i}{2m}$$

$$\bar{P}_x = m \bar{V}_x$$

$$\vec{J}_x = \sum_i \vec{J}_{xi} = \sum_i n_i e \vec{V}_{xi} = \vec{m} \sum_i \vec{P}_{xi}$$

وكم ذكرنا سابقاً ، ان مستويات الطاقة لالكترونات التوصيل متقاربة ، لذلك يمكن استخدام قاعدة تقنين فضاء الطور التقليدية في هذه الحالة ، ويمكن استبدال  $\sum_{i} \overline{J}_{xi}$  .  $\overline{P}_{xi}$ 

التوالي ، حيث 
$$f$$
 ،  $J_x$  ،  $p_x$  ،  $\frac{edN}{V}$ 

(e) شحنة الالكترون ، dN هو عدد الكترونات التوصيل في حجم V من المعدن و في عنصر الحجم  $d^3 P = dP_x dP_y dP_z$  :  $d^3 P = dP_x dP_y dP_z$ 

والرقم (٢) استخدم طبقاً لقانون (باولي) .

$$dN = \overline{N(p,T)} . \qquad \frac{2V dP_{\lambda} dP_{y} dP_{z}}{h^{3}} \qquad (YY - 1)$$

$$N(P,T) = \frac{dN_i}{dg_i}$$
 : خيث

$$ni = \frac{dN}{V} = \frac{2}{h^2}$$
.  $\overline{N(P,T)} dP_x dP_y dP_z$  : ولكن

... 
$$J_{x} = \int dJ_{x} = \frac{2e}{mh^{3}} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{dp_{x}} \int_{0}^{\infty} dP_{y} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{(P,T)} P_{x} ... (Y\xi - Y)$$

$$\frac{2m\gamma}{(2mV_{0})!/2}$$

$$\epsilon_{F} < V_{o} \le \frac{P^{2}\chi}{2m} \le \epsilon$$
 : ولكن تحت الشروط السابقة

$$e^{\frac{\epsilon - \epsilon F}{kT}} >> |$$
 : it is it is it is the contraction of the contraction of the contraction is the contraction of the

في هذه الحالة ، فان توزيع فيرمي ـ دايراك (٦ ـ ١٣) يؤ ول الى التوزيع المسمى ذيل بولتزمان (الشكل ٦ ـ ١١) أى أن :

$$\frac{dNi}{dgi} = N(P, T) = e^{-\frac{1}{kT}} (p^2/_2 m - \mu)$$

حيث ( $\mu$ ) هو الجهد الكيميائي ويساوي  $\tilde{N}$  عند الصفر المطلق . وبالتعويض عن قيمة P بمركباتها ، ( $\tilde{N}$  (P,T) في المعادلة (P - P) واجراء التكامل نحصل :

$$J_x = \frac{4\pi me}{h^3} \cdot (kT)^2 \cdot e \quad \phi \cdot kT \qquad \dots \qquad (Y \circ - Y)$$

$$\phi = V_0 - \epsilon F \qquad \vdots$$

والمعادلة ( $$ _{-}$  وهي معادلة (دشهان) للانبعاث الحراري الآيوني وتسمى والمعادلة (للمعدن (Work Function) وهي تمثل اقبل طاقبة ممكنية لهروب الالكترون من المعدن الى خارج سطحه .

#### (Semi Conductors) أشباه الموصلات

لقد نجح نموذج الألكترونات الحرة في المعادن في تفسير العديد من الظواهر منها الانبعاث الآيوني الحراري والحرارة النوعية للالكترونات قرب الصفر المطلق . . الخ ولكنه يعجز عن تصنيف المواد الصلبة من حيث خاصية التوصيل الكهربائي الى مواد جيدة التوصيل (موصلات) واخرى رديئة التوصيل (عوازل) .

ولقد نجحت فيزياء الحالة الصلبة في تقديم صورة واضحة للتوزيع الكهربائي المختلف والمميز لكل من هذه المواد الصلبة ، مما يجعل بعضها موصلاً جيداً وبعضها الآخر عازل للكهرباء .

ففي نظرية الجوامد نجد أن حركة الالكتر ونات داخل المواد الصلبة تحت تأثير الجهد الموجب للشبكة البلورية ، هي حركة مقننة نحصل عليها بحل معادلة شرودنكر ، ونتيجة لتلك الحسابات نجد ان مستويات الطاقة المقننة المتاحة لهذه الذرات متقاربة جداً في القيمة (kT) الى درجة يمكن معه اعتبار ان كل قيم الطاقة (kT) في المدى kT متاحة لهذه الالكتر ونات (المخطط kT وعند درجة الطاقة (kT)

الصفر المطلق في كل الأجسام الصلبة تكون كل مستويات الطاقة في هذا المدى او المنطقة مشغولة . اي ان متوسط نسبة الاشغال  $\overline{N}(\epsilon,0)=1$  في المنطقة متوسط نسبة الاشغال المنطقة منطقة اخرى للطاقة تسمى حزمة طاقة التكافوء (Valence band) وتعلو هذه المنطقة منطقة اخرى للطاقة تقع في المدى  $\epsilon v = \epsilon v = \epsilon$  وهي منطقة محرمة (Forbidden band) او غير متاحبة للالكترونات .

ان اتساع منطقة الطاقة الممنوعة (فجوة الطاقة) أي قيمة  $\sim e_{g=e} - e_{g} = e_{g}$  هي التي تحدد طبيعة الاجسام الصلبة ان كانت موصلة او عازلة او شبه موصلة للا $\sim kT < e_{g}$  فاذا كانت  $\sim kT < e_{g}$  كانت

رمت الموصلات .

| CONDUCTION BAND | المادة اشباه الموصلات |
| CONDUCTION BAND | مرمة الموصل (ضماملون) |
| مرمة الموصل (ضماملون) |
| CONDUCTION BAND | مرمة الموصل (واسمة الموصل الكهرباء حزم الطاقة للعازل الكهرباء |

المخطط (٦ - ١٥)

ويعلو منطقة الطاقة الممنوعة (٤٤≥٤) حزمة طاقة اخرى تسمى حزمة التوصيل ، وان طبيعة هذه الحزمة يختلف حسب طبيعة المادة الصلبة فعند الصفر المطلق تكون هذه المنطقة خالية في حالة العوازل واشباه الموصلات ، وتكون مشغولة جزئياً في حالة المواد الموصلة للكهرباء المخطط (٦٠ ــ ١٥). فالمخطط اعلاه هو تمثيل بياني لحزم الطاقة المختلفة توضح الفرق بين العوازل والموصلات واشباه الموصلات ، وهي عبارة عن خطوط أفقية بعضها فوق بعض ومتقاربة جداً في الارتفاع كل منها يمثل مقدار طاقة الالكترون والامتداد الافقي متساوية الطاقة ويمثل مكان الالكترون اللامحدود داخل الجسم الصلب .

والجدول (٦ - ٢) بين قيمة  $\epsilon$  (بالالكترون فولط) لبعض المواد العازلة واشباه الموصلة .

(الرمز)	شبه الموصل	€(ev)	العاز ل	€s(ev)	الرمز
Si	السليكون	1,18	الماس	0,44	С
Ge	الجرمانيوم	٠,٦٧	أكسيد الزنك	٣,٢	Zn O
Te	التيلوريوم	٠,٣٣	كلوريد الفضة	۳,۲	Ag Cl
In Sb	انتيمون الانديوم	٠, ٢٣	کبریت <b>ی</b> د ااک	۲, ٤٢	Cd S
Ga As	زرنيخات الكاليوم	١,٣٤	الكادميوم		

(الجدول (٦ - ٢) \_ طاقة الفجوة لمجموعة من العوازل واشباه الموصلات

#### (٦ - ١٣) اشباه الموصلات الذاتية

(Intrinsic Semi Conductors)

هناك بعض المواد الصلبة المسهاة اشباه الموصلات الذاتية (مشل الجرمانيوم والسليكون النقيان) تكون عازلة للكهرباء عند درجة الصفر المطلق وبرفع درجة حرارتها تتحول الى موصلات. ففي الشكل (٦ ـ ١٥) نلاحظ توزيع الالكترونات في حزم الطاقة المختلفة ، ويلاحظ ان منطقة التوصيل خالية تماماً من الالكترونات في حالة العوازل ، كذلك اشباه الموصلات الذاتية عند درجة الصفر المطلق . اما منطقة التكافوء ، فمشغولة تماماً عند الصفر المطلق .

وبرفع درجة الحرارة الى (T) ك وعندما تكون  $\epsilon - \epsilon = \epsilon < kT$  بالتسخين فان بعض الالكترونات في منطقة التكافوء ذات الطاقة  $\epsilon \approx \epsilon < \epsilon < \epsilon$  سوف تتهيج (تشار Excited ) حرارياً وتقفز الى منطقة التوصيل ، وعليه فان متوسط نسبة الأشغال في منطقة التوصيل يزداد من الصفر الى القيمة :

$$\vec{N}(\epsilon, T) = \frac{Ni}{gi} = \frac{1}{e(\epsilon - \mu)/kT + 1}$$

حيث ( $\epsilon$ ) هي طاقة الالكترونات المثارة في منطقة التوصيل حيث  $\mu$  أي أن لهذه الالكترونيات يكون 1 > 1  $\exp(\epsilon - \mu)/k$  وتصبح المعادلة اعلاه بالصيغة (باهمال الوحدة) :

$$\widetilde{N}$$
  $(\epsilon,T) = e_{xp} - (\epsilon - \mu) / kT$ 

وان عدد تلك الالكتر ونات المثارة حرارياً ضمن مدى الطاقة  $\epsilon + d\epsilon$  هي:

$$dN_e = N_e (\epsilon, T) - g(\epsilon) d\epsilon$$

حيث  $g(\epsilon)$  هي عدد حالات التكميم الموجودة في المدى

$$\epsilon \ge \epsilon_{\rm g} = \epsilon_{\rm c} - \epsilon_{\rm v}$$
 ;  $\epsilon + d\epsilon, \epsilon$ 

$$g(\epsilon)d\epsilon = \frac{4\pi V}{(2m_e)^3/2} (\epsilon - \epsilon_g) \nu_2 d\epsilon$$
 : ولکن

حيث "me هي الكتلة الفعالية للالكترون في المعدن (وهي لا تساوي كتلة الالكترون الحر عادة وهي تعتمد على العدد الموجي k للالكترون وعلى طاقته) .

فاذا وضعنا:

$$\vec{\text{Ce}} = \frac{4\pi \text{V}}{\text{h}^3} (2\text{me})^{3/2}$$

وكاملنا المعادلة السابقة لحساب Ne للالكترونات المثارة حرارياً من منطقة التوصيل نحصل :

$$N_e = Ce \int_{\epsilon_g}^{\infty} (\epsilon - \epsilon_g)^{1/2} EXP - (\frac{\epsilon - \mu}{kT}) d\epsilon$$

$$= \epsilon_g \qquad kT$$

$$= \epsilon_g \qquad identity in the equation of the equation  $\epsilon - \epsilon$ 

$$= \epsilon_g \qquad kT \qquad identity in the equation  $\epsilon - \epsilon$$$$$

Ne = Ce EXP 
$$\left(\frac{\mu - \epsilon_g}{kT}\right) (kT)^{3/2} \int_{\alpha}^{\infty} x^{1/2} e^{-x} dx$$

ولكن قيمة التكامل الأخير تساوي  $\frac{1}{2}(\pi)$  لذلك فان

Ne = 
$$\frac{(\pi)^{3}/_{2}}{2}$$
 Ce  $(kT)^{3}/_{2}$  exp  $(\mu - \epsilon_{8}) / kT$  .... (Y7-7)

اما منطقة التكافوء ، أي في مدى الطاقة  $0 \ge \epsilon \ge 0$  فنجد أنه عند درجة الصفر المطلق تكون  $1 = \frac{\overline{N}(\epsilon, \overline{0})}{\overline{N}(\epsilon, \overline{0})}$  وبعد التسخين تخرج بعض الالكترونيات من تلك المنطقة تاركة عدد مساوي لها من الثقوب (Holes) الموجبة وبالتالي يقبل معدل الاشغال ( $\epsilon$ ,  $\overline{N}$ ) آلي قيمته :

$$\frac{1}{\exp\left(\varepsilon-\mu\right)/kT + 1}$$

حيث  $\epsilon > 0$  كذلك فان  $\epsilon < \mu$  أي ان طاقة الالكترون في هذه المنطقة أقل من طاقة فيرمى .

وبما ان نسبة متوسط الأشغال بالالكتر ونات  $N_{\epsilon}(\epsilon,T)$  مضافاً اليه متوسط نسبة الأشغال للثقوب  $N_{\epsilon}(\epsilon,T)$  في منطقة التكافوء يساوي الوحدة أي ان :

$$\overline{N}_{e}(\epsilon,T) + \overline{N}_{h}(\epsilon,T) = 1$$

وبالتعويض عن قيمة  $N_{\rm e}(\epsilon,T)$  من العلاقة السابقة ولكون  $\epsilon < \mu$  في منطقة التكافؤ نحصل :

 $\epsilon+d\epsilon$ , وناطاقة التكافوء في مدى الطاقة  $\epsilon+d\epsilon$  كذلك فان عدد الثقوب في منطقة التكافوء في مدى الطاقة  $dNh(\epsilon,T)=-\overline{N}h(\epsilon,T)g(\epsilon)d(\epsilon)$ 

وباعتبار  $\epsilon=0$  فان قيمة مستويات الطاقة في منطقة التكافوء تصبح سالبة وعلى ذلك فان عدد حالات التكميم المتاحة للثقوب في المدى  $\epsilon+d\epsilon$  هي :

$$g(\epsilon) d\epsilon = \frac{4\pi V}{h^3} (2mh)^3 /_2 (-\epsilon)^1 /_2 d\epsilon$$

وبالتعويض والتكامل على كل منطقة التكافوء ، نجد أن عدد الثقوب (Nh)

$$N_h = C_h \int_{-\infty}^{0} (-\epsilon)^{1/2} e^{-(\mu - \epsilon)} / kT d\epsilon \qquad (YV - 7)$$

$$C\dot{h}=\frac{4\pi V}{h^3}$$
 : حيت 
$$(2mh)^{3/2}$$
 
$$(YV-7)$$
 تكامل المعادلة  $x=-\frac{\epsilon}{KT}$  نعويض عن  $x=-\frac{\epsilon}{KT}$ 

$$N_{h} = -e^{-\mu / kT} \frac{e^{-kT} (kT)^{3}}{2} \int_{-\infty}^{0} x^{1} / 2 e^{-kT} dx$$

$$= C_{h}^{2} \frac{\pi^{1} / 2}{2} (kT)^{3} / 2 e^{-\mu / kT} .... (YA - 7)$$

 $N_h = N_e$  :  $\dot{}$ 

وبتساوى المعادلتين (٦ ـ ٢٦) (٦ ـ ٢٨) نحصل على قيمة  $(\mu)$  لاشباه الموصلات الذاتية.

$$\mu = \frac{3}{4} kT \ln\left(\frac{mh}{me}\right) + \frac{\epsilon g}{2} \qquad \dots \quad (\Upsilon\P - \Upsilon)$$

 $\mu = \epsilon_{\rm E}/2$  : فعند الصفر المطلق يكون

# (٦ - ١٤) معامل التوصيل الكهر بائي لأشباه الموصلات الذاتية

اذا فرضنا ان بلورات الجسم الصلب لشبه الموصل الذاتي متجانسة الخواص مع الاتجاه (Isotropic) فان معامل التوصيل الكهربائي ( $\sigma$ ) للهادة الشبه موصلة يعبّر عنه بالعلاقة :

$$\sigma = \operatorname{en} \mu \operatorname{mob}$$
 ....  $(\Upsilon^* - 7)$ 

معامل هسحنة الالكترون (أو الثقب) ، الكثافة العددية لها  $\mu$  معامل الانجراف Mobility الشحنة (لاحظ أن  $\mu$  لا علاقة له بالجهد الكيميائي  $\mu$ ) ويعرف  $\mu$  من العلاقة .

$$V = \mu \text{mob } E \qquad \qquad \dots \quad (m - 1)$$

 $\underline{F}$  سرعة حاملات الشحنة بتأثير المجال الكهربائي حيث  $\underline{V}$ 

ويسبب وجود الالكترونات والثقوب في المواد الشبه الموصلة الذاتية فان:

$$\sigma = e(ne\mu e + ne\mu h) \qquad \qquad ... (\Upsilon\Upsilon - 7)$$

e ، ايمثل الكثافة العددية للثقوب ، μh معامل الانجراف لها ، e القيمة العددية للشحنة.

 $ne = \frac{Ne}{V}$ ,  $nh = \frac{Nh}{V}$ ولكن:

$$n_{e} = n_{h} = \sqrt{\frac{N_{e} N_{h}}{V}} = \frac{2}{h_{3}} (2\pi kT)^{3/2} \frac{* *}{(m_{e}m_{h})^{3/2}} e^{-\epsilon g/2} kT$$

$$n_{e} = \frac{N_{e}}{V}, n_{h} = \frac{N_{h}}{V} \frac{2}{h_{3}}$$

$$\sigma = \frac{2e}{memh} (memh)^{3} / (\mu e + \mu h) (2\pi kT)^{3} / (e - \epsilon_{g}/2kT)^{3}$$

$$\therefore \ln \sigma = A + \frac{3}{2} \ln T - \frac{\epsilon g}{2kT} \qquad \cdots \qquad (\text{Y} \xi - 7)$$

وحيث (A) كمية ثابتة . ولكن تغير الحد  $\frac{\epsilon_s}{2kT}$  اسرع من تغير الذلك فان العلاقة (٦ \_ ٣٤) تعطى خطأ مستقماً تقريباً (المخطط ٦ \_ ١٦) .

أي أن تو تزداد مع T لأشباه المواصلات الذاتية على عكس المعادن (الموصلات) عند تسخينها.



#### (٦ - ١٥) الانتقال من الاحصاء الكمي الى الاحصاء التقليدي:

لقد تطرقنا في هذا الفصل الى مفاهيم الميكانيك الكمي لتفسير الظواهر الفيزيائية ، ولا بد من معرفة الشروط التي تنقلنا من الاحصاء الكمي الي الاحصاء التقليدي (الكلاسيكي) . على مجموعة من (n) جسيمة . ففي نظرية التكميم تكون دالة الحجز:

 $Z = \sum gi \ Exp - (E_i / kT)$  حيث Ei هي طاقة مستوى التكميم للجسيمة (gi), (i) هو درجة التحلل لذلك Ei المستوى ذو الطاقة (Ei) ، وللحصول على دالة الحجز المجهرية التقليدية اي للانتقال من الميكانيك الكمى الى الميكانيك التقليدي ، نجرى التغيرات التالية :

ا يا نبدل gi بالمقدار  $\frac{dr^3 dp^3}{h^3}$  في فضاء الطور وهي تساوي عدد حالات التكميم المتاحة للجسيات في المنطقة المحصورة بين المتجهين r+dr,r و برخم يقع في المدى P+dp,p

٢ ـ نستبدل Ei المكممة بالطاقة التقليدية (E)حيث∞≥ E≥0وذلك لأنه في الاحصاء التقليدي كها هي الحالة في الميكانيك التقليدي تكون طاقة الجسيمة متصلة وغير مقتصرة على قيم محددة ، كها في حالة التكميم ، بل تأخذ قياً من الصفر والى ما لا نهاية .

(1) في الميكانيك الكمي باشارة التحامل (1) في الميكانيك الكمي باشارة التحامل (1) في الميكانيك التقليدي ، لكون الدالة في الحالة الأولى منفصلة وفي الحالة الشانية متصلة ، والتكامل يشمل فراغ احداثيات الازاحة وفراغ الزخم المقترن بها . لذلك فان دالة الحجز التقليدي (1)

 $d_{\underline{r}}^{3} = \iiint dxdydz = ميمة N لنظام الخجم النظام الخجم كذلك$ 

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^{3}P EXP - \left(\frac{p^{2}}{2kmT}\right) = \left(2\pi mkT\right)^{1/2}$$

$$Zc \quad V\left(\frac{2\pi kmT}{h^{2}}\right)^{3/2}$$

حيث V = 1 سم  $^{*}$  ، 1 البعد بين جزيئات الغاز :

$$\therefore \left(\frac{V}{L}\right) \gamma_{i} = 1 > 10^{2} \left(\frac{h^{2}}{2\pi m k T}\right) \gamma_{2}$$

ولكن:

$$\frac{\overline{\epsilon}}{\epsilon} = \frac{p^2}{2m} = \frac{3}{2} kT$$

$$\therefore l > \lambda D = \frac{h}{\sqrt{\overline{p_2}}} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

حيث λD هو طول موجة (دى برولي) .

وخلاصة القول ؛ يمكننا استخدام القوانين التقليدية ومنها ٢٥ لحساب الخواص الثرموداينميكية بشرط ان يكون معدل المسافة البينية للجزيئات اكبر من طول موجات (دي برولي) المصاحبة لحركة الجسيمة .

وهذا يتم للغاز المخلخل وفي درجات حرارية عالية . اما الغاز الكثيف البارد فان جزيئاته تتقارب وتزداد قوى التفاعل بينها Interaction forces وبذلك تتدخل قوى التكميم والتي لا يمكن تجاهلها . لذلك نجحت قوانين الميكانيك التقليدي على حركة الجسيات المتباعدة ، مثل حركة المنظومة الشمسية ، ولكنها فشلت في دراسة الانظمة الذرية المكونة للهادة بحالة السيولة او الصلابة حيث

#### تمارين الفصل السادس

١ ما فرق بين الفرميونز والبوزونز ؟ هات أمثلة لكل منهما .

٢ - متى يصح احصاء .F.D., B.E على الغاز المثالي ؟

٣ - احسب عدد الالكترونات في حزمة التوصيل لكل من الليثيوم والنحاس ، مستعيناً بقيمة طاقة فيرمي على لهذه المعادن في الجدول (٦-١) وقارنها بعدد الكترونات التكافوء لوحدة الحجوم لهذين الفلزين .

الجواب : ۲۰۸۱ × ۱۰۲۰م، ۵٫۰ × ۱۰۲۰م

عين طاقة فيرمي للصوديوم اذا علم ان كثافته ٩٨٠ كغم/م٢ وان كل ذرة منه تعطى الكتروناً واحداً الى حزمة التوصيل .

الجواب: ۳,۱۵۱ (ا . ف .)

اذا علم أن اللجرمانيوم تقارب ٧٥, \* إ.ف. ، ففي أية موجة يبدأ الجرمانيوم بامتصاص الضوء .

الجواب: ١,٦٥ مايكرون.

 $\pi$  يسرمة m تسير بسرعة ( $\lambda D_L$ ) بحسيمة كتلتها m تسير بسرعة ( السرعة الأكثر احتالاً ) في توزيع ماكسويل بدرجة  $\pi$  تساوي :

$$\lambda = \frac{h}{(2 \, \text{m kT})^{1/2}}$$

واحسب طولها للنيوترون بدرجة ٢٠ س° .

الجواب : ۱٫۸۱ انکستروم .

٧ ـ جد متوسط سرعة الالكترون بدرجة الصفر المطلق في معدن يحتـوي
 على "١١" الكترون حر/سم".

٨ - في تفاعل نووي (لحظات نشوء الكون) استخدمت ١٠٪ من الطاقة الحرارية لانتاج الكترون وبوزيترون ، فها هي درجة حرارة التفاعل ؟
 الجواب : ١٠٣٠ × ١١٠٠ ك

٩ \_ إن كثافة الطاقة لضوء النجم تقارب (١) إ. ف /سم فها درجة حرارته على فرض أنه جسم أسود ؟

۱۰ ـ اذا علم أن حجم التجويف الذي يحتوي اشعاع الجسم الأسود بدرجة ۲۰۰۰ ك ، قد تمدد من ۱۰ الى ۲۰۰۰ سم مع ثبوت (T) فاحسب :

أ) الطاقة الحرارية المنتقلة .

ب) تغير طاقة الاشعاع .

ج) الشغل المصروف.

د) درجة حرارة الاشعاع لوحصل التمدد اديباتيكياً .

الجواب : ١٦٠ إرك ، ١٢٠ إرك ، ٤٠ إرك ، ٢٠ إرك . ١١ ـ إن طاقة طيف الشمس تصل ذروتها عند الموجة (٤٨٤) انكستروم . فلو فرضنا الشمس جسم اسود فها مقدار :

أ) درجة حرارة سطحها ؟

ب) كثافة الطاقة الاشعاعية ؟

ج) ضغط الاشعاع ؟

الجواب : ۳،۲۸ ك ، ۹,۸٤ ارك/سم، ۳,۲۸ داين/سم٠.

۱۲ ـ سبعة جسيات متميزة ، متوزعة على مستويي طاقة ، المستوى الأعلى غير متحلل وطاقته ۱۰-۱ إ . ف. مقارنة بالمستوى الأسفل المزدوج التحلل . احسب : الطاقة الـداخلية والانتروبي للنظام ، اذا كان له استعداد لاشغال جسيمتين في المستوى الأعلى .

الجواب : ٤ × ١٠- اإ. ف ، ٦,٥١ من قيمة .

F.D. ولاحصاء. B.E. برهن ان الاحتالية الثرموداينميكية لاحصاء. B.E ولاحصاء. T.D. تصبح بالصيغة التقليدية (We).

 $W_c = \prod_i \frac{g_i \, N_i}{N_i + 1}$  على فرض أن :  $g_i \gg N_i$ 

14 - برهن ان الاحتالية الثرموداينميكية (W) للاحصاءات الثلاثة يمكن عثيلها بالصبغة :

$$W = \prod \ g_i(g_i - a) \left(g_i - 2a\right) \left(g_i - 3a\right) \dots \left[g_i \text{-} (N_i - 1)a\right] \ N_i$$

حيث a = ± 1,0 تبعاً لنوع الاحصاء .

نظام يتكون من آن متوسط عدد الجسيات  $\widetilde{N}$  في المستوى (i) لنظام يتكون من M.B. جسيمة تخضع لاحصاء M.B.

$$\overline{N}_i = -NkT \ (\frac{\partial \ln Z}{\partial \epsilon_i})$$

**۱٦ ـ** برهن :

$$W_i = \frac{g_i(g_i + N_i - 1)!}{g_i! N_i!} = \frac{(g_i + N_i - 1)!}{(g_i - 1)! N_i!}$$

c+dc,c عدد الفرميونات المحصورة بين فاصلة السرعة د+dc,c بدرجة (T) هي

$$d N(c) = \frac{8\pi V m^3}{h^3} \cdot \frac{c^2 dc}{Exp(-\frac{mc^2}{2} - \epsilon + ) / kT + 1}$$

m كتلة الفرميون V حجم الوعاء .

۱۸ ـ بين أن عدد الفرميونات بمركبات السرعة السينية (x) المحصورة بين (u + du), (u)

$$\begin{split} dN(u) &= \frac{4\pi V m^2}{h^3 k T} \Big[ \; L_n \, E_{xp} \left( \, \varepsilon_{\, F} - m u^2 \, / \, \, 2 \right) / \, k T \, + \, 1 \, \Big] \, du \\ & \propto \\ \left( \int (\, a \, e^{\, x} \, \, \, 1)^{\, - \, 1} \, dx \, = \ln \left( \, 1 \, + \frac{1}{a} \, \right) \end{split} \right. \end{split}$$

19 - جد النسبة بين احتالية الانبعاث الآني والمحتث بدرجة  $\ref{eq:condition}$  .  $f = 10^{13} \, HZ$   $f = 10^{13} \, HZ$  .  $f = 10^{13} \, HZ$   $f = 10^{14} \, HZ$ 

۲° - برهن ان الحرارة النوعية تحت حجم ثابت لغاز . F .- D المثالي يعبـر
 عنها بالعلاقة :

$$C_{V} = \frac{\pi^{2}}{2} R^{2} \left( \frac{kT}{\epsilon F} \right) \left[ 1 - \frac{3\pi^{2}}{10} \left( \frac{kT}{\epsilon F} \right)^{2} + \dots \right]$$

وعينٌ من هذه العلاقة ، الحرارة النوعية المسببة عن الالكتر ونات (Ce) الحرة في المعدن . وبينٌ أنها قليلة مقارنة بالحرارة النوعية الاهتزازية لذرات البلورة في درجات الحرارة المرتفعة .

برهن ان الكثافة العددية للفوتونات (n) في الجسم الأسود تساوي :  $n = 8\pi (\frac{kT}{h.c})^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1}$ 

حيث التكامل = ٤٠٤،٢

من ( $\mu$ ) من الاحصاء التقليدي يعطي قيمة الجهد الكيميائي ( $\mu$ ) من العلاقة :

$$\mu = -kT(L_nZ - L_nN)$$

(تنويه : دالة التوزيع التقليدي تشتق من داله F - D مع الوحدة في المقام) .

:  $\mu = \exp\left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{-}\right)^2 + \dots\right]$ 

فها درجة الحرارة التي يقوم بها الحد الثاني في المعادلة بالتأثير بمقدار 1\% من قيمة T . واحسب T للنحاس :

. ساخواب : 
$$T = \frac{\sqrt{3} \cdot e^{F}}{5\pi k}$$
 : الجواب

من هذا المثال نلاحظ اننا نتمكن من اعتبار  $\mu=\epsilon$  حتى في درجات الحرارة الاعتبادية .

٢٤ ـ اذا كانت الحرارة النوعية المولية لغاز من الالكتر ونات الحرة في المعدن تساوي :

$$C_{V} = \frac{\pi^{2}}{2} \left( \frac{kT}{|\mathbf{\epsilon}|_{F}} \right) R$$

فها قيمتها للفضة بدرجة ٣٠٠ ك .

 $C_V = 0.0225 R$  : | + |

۲۵ ـ احسب W للاحصاءات الثلاثة لمستوى طاقة يحتوي على ٣ جسيات فيه ٤ حالات تحلل ثم رتب جدولاً لكل حالة يوضع التوزيع :

المرابع المراب

متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة مكتبتي الخاصة على موقع ارشيف الانترنت الرابط

https://archive.org/details/@hassan\_ibrahem

### الملحق (أ)

## (١) ملاحظات عن التجميع

في الاحصاء الفيزيائي كثيراً ما نرغب في إيجاد مجموع متوالية :

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = X_1 + X_2 + \dots X_N$$
 $i = 1$ 
 $N \dots, 2, 1 = i$ 
: : حیث

فنلاحظ ان الدليل المميز (i) للمتغير الاهو دليل اختياري ومن الممكن استبداله بدليل آخر (i) . وان استخدام رمز التجميع (∑) يسهّل الأمور كشيراً ، فمثلاً :

$$i = m j = n$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} X_{i} \sum_{j=1}^{\infty} y_{j} = (X_{1} + X_{2} \dots X_{m})(y_{1} + y_{2} + \dots y_{n})$$

$$i = m j = n m n$$

$$\begin{array}{lll} i=m & j=n & m & \sum\limits_{j=1}^{n} x_{i} & \sum\limits_{j=1}^{n} y_{j} = \sum\limits_{j=1}^{n} & \sum\limits_{j=1}^{n} x_{i}y_{j} \end{array}$$

(٢) مجموع المتوالية الهندسية كثيرة الحدود :

لايجاد مجموع المتوالية الهندسية Snحيث :

ومن هاتين المعادلتين (بالطرح) نجد :

$$Sn = a(X^{n+1}-1) / (x-1)$$

: فاذا كانت المتوالية غير منتهية ( $\infty$  –  $\infty$ ) فان المتوالية غير منتهية ( $\infty$ 

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-x}$$

#### (٣) تكاملات هامة:

$$g(x) = g(-x)$$
 : عندما یکون  $g(x) = g(-x)$  عندما یکون

$$f(x) = f(-x)$$
 والدالة فردية عندما تكون

$$\int_{a}^{a} g(x) dx = 2 \int_{0}^{a} g(x) dx$$
 : الدالة الزوجية :

$$a$$

$$\int f(x) dx = 0$$

$$-a$$
(الدالة الفردية)

### (Gaussian Integrals) : تكاملات كاوس :

لو اخذنا التكامل:

$$I_0(a) = \int_0^\infty e^{-a} x^2 dx = \int_0^\infty e^{-a} y^2 dy$$

فان:

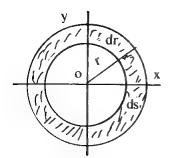
$$I_0^2(a) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-a} (x^2 + y^2) dx . dy$$

ضع

$$ds = dx \, dy \, \cdot \, r^2 = x^2 + y^2$$

$$I_0^2(\alpha) = \int_0^\infty e^{-ar^2} ds$$

ويمكن تمثيل هذه المقادير على شكل قرص دائري (المخطط). وبما ان التكامل في المعادلة الأخيرة يتم على الربع الموجب من المستوى(Xy) .



$$I_0^2 (a) = \frac{1}{4} \int e^{-a} r^2$$
 .ds

= 
$$\sqrt{4} \cdot 2\pi \int_{0}^{\infty} re^{-ar^{2}} dr$$
  

$$S = \pi r^{2} \text{ if } re^{-ar^{2}} \text{ if } re^{-ar^{$$

$$Z = ar^2$$

$$\pi$$

$$I_{z^{2}}(a) = \frac{\pi}{4a} \int_{0}^{\infty} e^{-Z} dZ = \frac{\pi}{4a}$$

$$I_0(a) = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{a} \right)^{1/2} \qquad \qquad \dots \qquad (5)$$

$$\infty$$
  $\int e^{-}ax^{2}$   $ds = 2l_{0}(a) = (\frac{\pi}{a})^{1/2}$  (i)

وكذلك (I<sub>1</sub>(a . حيث :

$$Z = ax^2$$

$$\therefore I_1(a) = \frac{1}{2a} \int_0^\infty e^{-Z} dZ \frac{1}{2a} \qquad \cdots$$

$$I_n(a) = \int_0^\infty x n_e - ax^2_{dx}$$
: each is in the contraction of the

تأخذ القيم التالية تبعاً لقيمة (n).

$$I m(a) \begin{vmatrix} \frac{1}{2} (\frac{\pi}{a})^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} (\frac{\pi}{a})^{\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2a} \begin{vmatrix} \frac{1}{4} (\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{a^3}) & \frac{1}{2a^2} \\ \frac{1}{2a^2} (\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{a^5}) & \frac{1}{a^3} \end{vmatrix} = \frac{1}{a^3} \begin{vmatrix} \frac{15}{16} (\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{a^7}) & \frac{3}{a^4} \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

وتسمى هذه متكاملات كاوس

$$\Gamma(n) = \int_{0}^{\infty} x^{n-1} \cdot e^{-x} dx \qquad (f)$$

$$\overline{(n)} = (n-1) \int_{0}^{\infty} X^{n-2} \cdot c \cdot x \cdot dx = (n-1) \overline{(n+1)} \cdot (-1)$$

$$\text{ i.i.}$$

$$(1) = \int_{0}^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

$$\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1 = 0! = 1!$$

$$(3) = 2(2) = 2 \times 1 = 2!$$

$$(4) = 3$$
  $(3) = 3 \times 2$   $(2) = 3!$ 

$$\therefore (n+1) = n! \qquad \dots (x)$$

$$(1) = 0! = 1$$
 .  $n = 0$  .  $n = 0$ 

وهو اثبات 1 = ! 0

: فان n=1/2 کذلك لو وضعنا م

$$(Y_2) = \int_0^\infty X - Y_2 e^{-x} dx = 2 \int_0^\infty e^{-x} dx \frac{1}{2}$$

 $Z^2 = X$  ضع

$$\therefore \ \overline{(1/2)} = 2 \int_{0}^{\infty} e^{-z^{2}} dz = 2 I_{0}(1) = (\pi)^{1/2}$$

وباستخدام العلاقة (ب) نحصل:

$$\lceil \frac{3}{2} \rceil = \frac{1}{2} \rceil \lceil \frac{1}{2} \rceil = \frac{1}{2} \lceil \frac{3}{2} \rceil = \frac{3}{2} \lceil \frac{3}{2} \rceil = \frac{3}{2} \lceil \frac{3}{2} \rceil = \frac{3}{4} (\pi) \frac{1}{2}$$

. . . . . الخ .

#### (Stirling Formula)

#### (٦) معادلة ستيرلينج

عندما بكون المتغير (X) كبيراً جداً وعدداً صحيحاً فإن:

Ln (X) ! = Ln 
$$x_1$$
 + Ln  $x_2$  + Ln  $x_3$  + ................ Ln  $x_n$ 

$$x = n \qquad x$$

$$\therefore \ln x ! = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \approx \int_{1}^{1} \ln x_i dx$$

$$x = 1 \qquad 1$$

وباستخدام طريقة التكامل بالاجزاء (Intergration by parts) وعندما يكون x>>1 نحصل:

$$\ln x = \int_{1}^{X} \ln x \, dx = x \ln x - X + 1 \approx X \ln x - X \tag{f}$$

X! تساوى (x+1) ان دالة كاما ويا

$$X! = \overline{(1 + x)} = X^x e^{-X} (2\pi x)^{1/2}$$
 ... (4)

.'. 
$$\ln X! = \frac{1}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{2} \ln x + X \ln x - X$$
 (->)

$$\frac{d \ln n!}{dn} \approx \ln n$$
 (د)  $\frac{d \ln n!}{dn} \approx \ln n$ 

(Error Function)

(٧) جدول دالة الخطأ

لقد سبق وتطرقنا الى هذه الدالة في الفصل الثاني وهي تعرف بالعلاقة :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{0}^{X} e^{-x^{2}} dx$$

وسوف ندون جدولاً لهذه الدالة للحد الذي تثبت فيه الى قيمة ٥,٠٠.

X	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4
erf(x)	0	0.1113	0.2142	0.3019	0.3711	0.4214	0.4552	0.4762
X	1	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8
erf(x)		0.4882	0.4946	0.4946	0.4977	0.4991	0.4996	0.500

#### (٨) بعض الثوابت المهمة:

النيوتن (nt) / م' = ' ۱ داين/سم'.

البار (BAR) = ' ۱' داين/سم' = ' ' ' ۱ ملي بار (mb) .

البار (BAR) = ' ۱' ۱ داين/سم' = ' ' ۱ ملي بار (mb) .

البحو القياسي = ' ۱' ۱ × ' ۱ ' ۱ نيوتن/م' ، اللتر – جو = ' ۱' ۱ جول .

السعرة = ' ۱۸ ۶ جول = ' ۲۰ ۲ × ' ۱'' ۱ ف . (الكترون ـ فولط) .

كتلة السكون للالكترون (me) = ' ۱ × ۱ × ۱ - ' ' كغم .

كتلة السكون للبروتون = ' ۱۰ × ۱ × ۱ - ' كغم .

ثابت الغاز (R)  $+ 1 \times + 1 \times$ 

المعارور والموتي

#### (٩) بعض المراجع:

- Thermodynamics And Statitical Physics D.C.Kelly 1973 Academic Press.
  - 2) Heat And Thermodyanamics M.W. Zemansky 1968 McGraw Hill.
- Thermodynamics, Kinetic Theory And Statistical Thermodynamics
   F.W.Sears and G.L. Salinger 1975 Addison-Wesley.
- 4) Fundamental University Physics III M. Alonso and E.J.Finn 1968 Addison-Wesley.
  - 5) Thermophysics A.L. King 1962 W.H. Freeman and Co.
- 6) Problems in Thermodynamics And Statistical physics Ed.P.T.Landsberg 1971 Pion L.T.D. London.
  - Statistical physics F. Reif Berkeley physics Course Vol. 5
     Mc G. Aw Hill Book Co. 1967
  - Elements of Statistical thermo dynamics L. K.
     Nash 2 nd Ed. Addison Wesley Co.

### (١٠) قائمة بالصطلحات المعربة:

مجرد، بحت ، خلاصة Abstract Active Activation مجموعة Assembly كاظم ، معزول ، اديباتي Adiabatic Average Atmoshpere الجو **Barrier** حاجز ، عائق البوزونات Bosons (جسیات بوز ـ اینشتاین) ذو الحدين **Binomial** اشعاع الجسم الأسود Black body radiation المقطع التصادم Cross section Collision الزمهريريات Cryo genics محافظ Conservative قانوني Canonical التجمع الكبير Canonical ensemble مساهمة Contribution ضوابط Constraints العكس ، النقيض Contrary الجهد الكيميائي Chemical potential Distribution Degenerate التحلل Degeneracy

Distinguishable	متميز
Diffusion	الانتشار
Deviation	الانحراف
Discrete	مقنن
Diatomic	ثنائي الذرة
Equilibrium	الاتزان
Equipartition	تساوي التوزيع
Emission	انبعاث
Emperical	افتراضي يثير ، يهيّج
Excite	یثیر ، یہیّج
Element	عنصر
Elementary	أولي
Effusion	الفوحان
Energy Exclude Factorial	طاقة يستثني المضروب
Fermions	رو. فرمیونات
Termons	ر یرد - (جسیات فیرمی ـ دایراك)
Function	ر بسي د دري د ديرت) دالة
Fluctuation	التراوح
	المسار الحر المسار الحر
Free path	
Grand	الأعظم
Grey body	الجسم الرمادي
Gravitation	الجاذبية الكتلية
Graviton	كرافيتون (كم الجاذبية)
Ground state	حالة القرار
Harmonic	حالة القرار توافقي

Harmonic osiliator	متذبذب توافقي
Hole	ثقب موجب
Induced	محتث
Ideal	مثالي
Induced emission	۔ انبعا <i>ث محت</i> ث
Instantaneous	آنی
Indistinguishable	پ غیر متمیز
Interval	فاصلة
Internal	داخلي
Intrinsic	ذاتي
Isolate	يعزل
Isothermal	متساوي في درجة الحرارة
Isotropic	 متجانس الخواص
Lattice	مشبك ، هيكل
Mean	متوسط
Momentum space	فضاء الزخم
Macrostate	الحالة المنظورة
Microstate	الحالة المجهرية
Mean free path	متوسط المسار الحر
Monatomic	آحادي الذرة
Metastable	شبه مستقر
Most probable	الأكثر احتمالاً
Occupation number	عدد الأشغال
Probability	الاحتالية
Particle	جسيمة جزئي
Partial	ڄزئي
Partition function	دالة الحجز

Photon	الضويئة ، الفوتون
Phonon	الصويتة ، الفونون
Polynomial	كثير الحدود
Polyatomic	كثير الذرات
Potential	كامن ـ جهد
Potential barrier	حاجز جهدي
Phase	طور
Phase space	فضاء الطور
Quantum	کم
Quanta	اکیام تکمیم شبه ساکن
Quantization	تكميم
Quasi-static	
Random	عشوائي
Root mean Square (RMS)	جذر معدل المربع
Resonator	رنان
Rotation	دوران
Statistics	الاحصاء
Statistical mechanics	الميكانيك الاحصائي
Stimulated	محفز
Standard	معياري
Standard deviation	الانحراف المعياري
Summation	التجميع
Translation	انتقال
Transition	نقلة طاقة
Transport	النقل
Thermodynamics	حركيات الحرارة ، الثرموداينميكس
Thermodynamic probability	الاحتالية الثرموداينميكية

Term

Uncertaintity principle

حد، شرط مبدأ الشك

Ultra sonics

Ultra violet

Velocity space

Vector

Wave number

Zero point

المعارونون الدوني Zero point energy

ما وراء السمعيات ما وراء البنفسجية فضاء السرعة متجه العدد الموجي نقطة الصفر طاقة الصفر المطلق

متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة مكتبتي الخاصة على موقع ارشيف الانترنت الرابط

https://archive.org/details/@hassan\_ibrahem

# الفهرس

# الفصل الاول:

## النظرية الحركية للغازات

0	(۱ - ۱) المقدمة
٨	(١ – ٢) النظرية الحركية للغاز المثالي
۲	(۱ - ۳) مبدأ تساوي اقتسام الطاقة
۲1	(١ - ٤) الطاقة الداخلية للغاز والسعة الحرارية النوعية التقليدية
14	(١ - ٥) الاحداثيات الكروية للفضاء والسرعة
۲۱	(۱ - ۲) السيل الجزيئي
	(۱ – ۷) توزیع السرع بین جزیئات الغاز
40	(قانون ماكسويل لتوزيع السرع)
	(١ ــ ٨) تحقيق معادلة ماكسويل لتوزيع السرع تجريبياً
۴.	(الحزم الجزيئية)
	(١ - ٩) فقدان الطاقة بالتصادم الجزيئي مع جدار
4.5	متحرك (المكبس)
٣٦	امثلة محلولة
٤١	اسئلة الفصل الاول
	الفصل الثاني: ظواهر النقل من الغازات
	(۲ ـ ۱) تأثیر حجوم الجزیئات والقوی الجزیئیة علی تصرف الغاز الحقیقی
٤٩	(معادلة فان دير فال)

(٢ - ٢) التصادم الجزيئي ومتوسط المسار الحر
(٢ ـ ٣) نظرية درود للتوصيل الكهربائي
(٢ ـ ٤) معامل اللزوجة للغاز
(٢ - ٥) التوصيل الحراري للغاز
(۲ - ۲) الانتشار
(۲ ـ ۷) نظرية الحركة البراونية
امثلة محلولة
اسئلة الفصل الثاني
الفصل الثالث: رياضيات الميكانيك الا-
* ( * , * a . * bb/ .
(۳ ـ ۱) مقدمة
(٣ ـ ٢) مقدمه (٣ ـ ٢) تعاريف احصائية أولية
(٣ ـ ٢) تعاريف احصائية أولية
<ul> <li>(٣ - ٢) تعاريف احصائية أولية</li> <li>(٣ - ٣) مفاهيم اساسية في الميكانيك الاحصائي</li> </ul>
<ul> <li>(٣ - ٢) تعاريف احصائية أولية</li> <li>(٣ - ٣) مفاهيم اساسية في الميكانيك الاحصائي</li> <li>(تكميم الطاقة والزحم)</li> <li>(٣ - ٤) فضاء الطور</li> </ul>
<ul> <li>(٣ - ٢) تعاريف احصائية أولية</li> <li>(٣ - ٣) مفاهيم اساسية في الميكانيك الاحصائي</li> <li>(تكميم الطاقة والزحم)</li> </ul>
<ul> <li>(٣ - ٢) تعاريف احصائية أولية</li> <li>(٣ - ٣) مفاهيم اساسية في الميكانيك الاحصائي</li> <li>(تكميم الطاقة والزحم)</li> <li>(٣ - ٤) فضاء الطور</li> <li>(٣ - ٥) الحالات المجهرية والحالات المنظورة امثلة محلولة</li> </ul>
<ul> <li>(٣ - ٢) تعاريف احصائية أولية</li> <li>(٣ - ٣) مفاهيم اساسية في الميكانيك الاحصائي</li> <li>(تكميم الطاقة والزحم)</li> <li>(٣ - ٤) فضاء الطور</li> <li>(٣ - ٥) الحالات المجهرية والحالات المنظورة امثلة محلولة</li> <li>امثلة محلولة</li> </ul>
<ul> <li>(٣ - ٢) تعاريف احصائية أولية</li> <li>(٣ - ٣) مفاهيم اساسية في الميكانيك الاحصائي</li> <li>(تكميم الطاقة والزحم)</li> <li>(٣ - ٤) فضاء الطور</li> <li>(٣ - ٥) الحالات المجهرية والحالات المنظورة امثلة محلولة امثلة محلولة</li> <li>آمثلة محلولة</li> <li>آمارين الفصل الثالث</li> </ul>

110	(٤ ـ ٣) التفسير الاحصائي للشغل والحرارة
711	(٤ - ٤) بعض تطبيقات احصاء ماكسويل/ بولتزمان
14.	امثلة محلولة
140	تمارين الفصل الرابع
	الفصل الخامس: نظريات الحرارة النوعية
149	(٥ ـ ١ أ) الحرارة النوعية للجزيئات الثنائية الذرة
121	(٥ ـ ١ ب) الحرارة النوعية للجوامد البلورية العازلة
121	تمارين الفصل الخامس
	الفصل السادس احصاء التكميم الحديث
101	(۱ – ۱) مقدمة
107	(٦ - ٢) احصاء بوز _ اینشتاین
100	(٦ ـ ٣) اشتقاق قانون توزيع بوز ـ اينشتاين
104	(٦ - ٤) تطبيقات احصاء بوز ـ اينشتاين
777	(٦ - ٥) احصاء فيرمي - دايراك
179	(٦ - ٦) توزيع طاقة الغاز الكتروني
177	(٦ - ٧) الحرارة النوعية للالكترونات الحرة في المعدن
178	(٦ - ٨) الغاز المثالي في احصاء التكميم
177	(٦ - ٩) حالة التحلل وعدم التحلل في الاحصاءات المختلفة
۱۷۸	(٦ - ١٠) نموذج الكترونات الحرة من المعادن

(٦ - ١١) ظاهرة الانبع	لكتروني الحراري	141
(٦ ـ ١٢) اشباه الموصا	ŧ	112
(٦ ـ ١٣) اشباه الموصا	اتية ا	711
(٦ ـ ١٤) معامل التوص	كهربائي لاشباه الموصلات الذاتية ا	119
(٦ _ ١٥) الانتقال من	اء الكمي الى الاحصاء التقليدي	19.
تمارين الفصل السادس	•	194
الملاحق	(	199
الثوابت		4 • £
المراجع	-	7.0
المصطلحات		4.7

المسأور فرال وبني

المسارور والموبئي

متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة مكتبتي الخاصة على موقع ارشيف الانترنت الرابط https://archive.org/details/@hassan\_ibrahem المعارورين والموسئي

متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة مكتبتي الخاصة على موقع ارشيف الانترنت الرابط https://archive.org/details/@hassan\_ibrahem